



Méthodes statistiques de reconstruction tomographique spectrale pour des systèmes à détection spectrométrique de rayons X

Pierre-Antoine Rodesch

► To cite this version:

Pierre-Antoine Rodesch. Méthodes statistiques de reconstruction tomographique spectrale pour des systèmes à détection spectrométrique de rayons X. Mathématiques générales [math.GM]. Université Grenoble Alpes, 2018. Français. NNT : 2018GREAM093 . tel-01971374v2

HAL Id: tel-01971374

<https://hal.science/tel-01971374v2>

Submitted on 27 Aug 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA

COMMUNAUTE UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mathématique et Informatique**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Pierre-Antoine RODESCH

Thèse dirigée par **Florence FORBES**, DR, INRIA

Préparée au sein du **Laboratoire CEA/LETI Grenoble** et du
Laboratoire Jean Kuntzmann

dans l'**École Doctorale Mathématique, Science et
Technologie de l'Information, Informatique (MSTII)**

Avec le co-encadrement de **Clarisse FOURNIER**, CEA/LETI
Grenoble et **Véronique REBUFFEL**, CEA/LETI Grenoble

**Méthodes statistiques de reconstruction
tomographique spectrale pour des systèmes
à détection spectrométrique de rayons X**

**Spectral CT statistical reconstruction methods
for X-ray photon-counting detector systems**

Thèse soutenue publiquement le **9 octobre 2018**,
devant le jury composé de:

Monsieur Laurent DESBAT

Professeur, Université Grenoble Alpes, Président

Madame Valérie KAFTANDJIAN

Professeur, INSA Lyon, Rapporteur

Monsieur Charles SOUSSEN

Professeur, Centrale Supélec, Rapporteur

Monsieur Xavier RONDEAU

Ingénieur, Digisens SAS, Le Bourget-Du-Lac,
Examineur

Monsieur Francis VERDUN

Professeur associé, Université de Lausanne-Suisse,
Examineur

Madame Florence FORBES

Directeur de recherche, INRIA Grenoble Rhône-Alpes,
Directrice de thèse



Remerciements

Je remercie en premier lieu Mme Valérie Kaftandjan et M. Charles Soussen d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon manuscrit. Je remercie aussi M. Laurent Desbat, M. Francis Verdun et M. Xavier Rondeau de leur présence le jour de la soutenance et de leur rôle de membre du jury.

Merci à Loïck Verger et Véronique Rebuffel d'avoir accepté de me faire confiance pour cette thèse malgré mon profil éloigné de la thématique au début de ces travaux. D'autant plus que j'ai parfois pu observer que beaucoup disent apprécier les profils interdisciplinaires mais peu en recrutent.

Un très grand merci à Florence Forbes pour ces nombreux aller-retours en vélo au CEA et pour sa disponibilité jamais mise en défaut. Merci aussi à Clarisse Fournier pour ses nombreuses relectures dont l'ultime express du manuscrit. Merci à Loïck Verger pour le suivi de la thèse et à Sophie Morales d'avoir pris le relais. Un grand merci à Laurence Wazne, Laurence Chassouant et Zilora Zouaoui pour leur si précieuse aide administrative.

Merci à Marc, Guillaume, Sylvain, Andrea, Vincent, Joachim que je me suis toujours senti libre d'interroger et qui m'ont fourni tant de fois des explications précises sur ces fameux détecteurs, leurs mystères électroniques et physiques... Merci à Murielle pour les partages au Texas ! Et à Jean-Michel pour le point balle jaune hebdomadaire, au plaisir de te croiser sur les terrains !

J'ai eu la joie de croiser pendant ces trois ans de thèse de merveilleux précaires. Spéciale dédicace à Cinzia, alias Tchi', known as Tchín-tchin', pour ces trois années (à quatre jours près), ce fut une immense joie de partager avec toi sur la thèse ou sur Maître Gim's. Yoann et Damien, on va pas se mentir, il y a parfois eu une ambiance délétère dans le bureau mais avec du recul, on ne peut nier que l'on est tous sortis grandis de cette expérience. Odran, ce fut un honneur de servir le CEA à tes côtés. Camille, Nathan, Frédéric, Anne, Daniel, Fanny, Artur, Mélanie, Véra, c'est un grand plaisir que celui d'avoir pu vous rencontrer dans et en dehors du labo !

Enfin, merci aux petites mains du jour J de la soutenance (Cécile, Marion et Sandrine), pour la cuisine mais surtout pour le Reste. Merci à l'autre Labo pour les pauses du midi et big up au Crew du 4bis dans sa totalité pour ma belle première année à Grenoble. Merci aux copains du tennis (Jof', Nico, Alexis, Thierry, Franky, Romain...) pour ces espaces d'exériorisation de ma frustration, à la team Taizé pour les séances de méditation, au CEBSH pour son point de vue éthique sur mes travaux, à la bande à Fred pour le chemin fait ensemble. Merci à Antonio et Patrick pour à peu près tout. Et si je voulais être précis, cela ne tiendrait pas en un seul manuscrit de thèse, j'écris donc juste "je vous aime" à ma famille pour leur indéfectible soutien.

Listes des Notations

Dimensions

- N_θ : Nombre d'angles de vue dans une acquisition tomographique
- N_t : Nombre de pixels physiques sur un détecteur
- N_p : Nombre de pixels de mesure dans un sinogramme, on a $N_p = N_\theta \times N_t$
- N_v : Nombre de voxels dans le volume à reconstruire
- N_c : Nombre de canaux de mesure
- N_E : Nombre d'énergie dans un spectre incident
- N_b : Nombre de fonctions de base pour la décomposition du coefficient d'atténuation en base de fonction (généralement = 2 ou 3)

Variables géométriques et indices

- θ : angle de vue de mesure tomographique (indiqué par $n_\theta \in [1; N_\theta]$)
- t : abscisse (coordonnée réelle) sur un détecteur linéaire
- p : indice pixel physique pour un détecteur : $p \in [1; N_d]$
- i : indice de pixel de mesure dans un sinogramme : $i \in [1, N_p]$, on $i = \theta.N_t + t$
- j ou ξ : indice portant sur les voxels : $j, \xi \in [1, N_v]$
- c : indice portant sur les canaux : $c \in [1, N_c]$
- E : indice portant sur les énergies : $E \in [1, N_E]$
- b ou a : indice portant sur les fonctions de base : $b, a \in [1, N_b]$

Variables définies en chaque voxel j d'un volume

- $\mu(E)$: vecteur du coefficient d'atténuation linéique à l'énergie E de valeur $\mu_j(E)$ au voxel j , $\mu \in \mathbb{R}^{N_v}$ (unité : m^{-1})
- $\mu^n(E)$: vecteur du coefficient d'atténuation à l'itération n à l'énergie E de valeur $\mu_j^n(E)$ au voxel j
- f_b : densité du matériau b de valeur f_{bj} au voxel j , $f_b \in \mathbb{R}^{N_v}$ (sans unité)

Variables définies en chaque pixel i d'un sinogramme

- $N_i^0(E)$: nombre de photons émis par la source arrivant au pixel i à l'énergie E .
- $N_i^{att_{reel}}(E)$: nombre de photons réels atténués à travers l'objet à l'énergie E au pixel i
- $att_i(E)$: atténuation estimée au pixel i à l'énergie E
- $N^{att}(E)$: nombre de photons estimés avant détecteur (ayant traversé l'objet) à l'énergie E

- $l_i = [Af]_i = \sum_{j=1}^{N_v} A_{ij} \cdot f_j$: Projection d'un volume f défini en chaque voxel j sur un pixel i .

Dans le cas d'un détecteur à intégration (mesure scalaire par pixel) :

- m^0 : mesure réelle sans objet de valeur m_i^0 au pixel i
- m : mesure réelle avec objet de valeur m_i au pixel i
- p : projection mesurée de valeur $p_i = -\ln\left(\frac{m_i}{m_i^0}\right)$ au pixel i

Dans le cas d'un détecteur à comptage résolu en énergie avec N_c canaux :

- m^{0c} : mesure réelle sans objet de valeur m_i^{0c} au pixel i dans le canal c (Nombre de photons)
- m^c : mesure réelle avec objet de valeur m_i^c au pixel i dans le canal c (Nombre de photons)

Autres notations

- ρ : densité volumique d'un matériau
- $\tau(E)$: coefficient d'atténuation massique d'un matériau tel que $\mu(E) = \rho\tau(E)$.
- $\phi_b(E)$: fonction de base à l'énergie E de la décomposition en base de fonction (unité : m^{-1})
- A : Matrice de projection (appelé aussi Matrice Système), $A \in \mathbb{R}^{N_p \times N_v}$, le coefficient à la ligne i à la colonne j est noté A_{ij} (unité : m^{-1})
- $\Phi(m; \mu)$: critère du maximum a posteriori dans le cadre d'un modèle bayésien
- $L(m; \mu)$: terme de vraisemblance qui traduit l'attache aux données dans le cadre d'un modèle bayésien
- $PL(m; \mu)$: terme de vraisemblance pour un modèle poissonnien ("Poissonian Likelihood")
- $R(\mu)$: terme d'a priori dans le cadre d'un modèle bayésien

Mathématiques

- $^T M$: matrice transposée de M .
- $P(A|B)$: probabilité conditionnelle : « P de A sachant B »
- $\mathcal{N}(m; \sigma)$ loi normale de moyenne m et variance σ .
- Pour la fonction : $\left\{ \begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R}^{N_v} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \mu & \mapsto & L(\mu) \end{array} \right.$, on définit :
- $(\nabla f)_{|\mu=\mu^n}$: vecteur gradient de la fonction L évalué en $\mu = \mu^n$
 $\left(\text{On note sa coordonnée au voxel } j : (\nabla f)_j|_{\mu=\mu^n} = \frac{\partial f}{\partial \mu_j}|_{\mu=\mu^n} \right)$
- $H_{|\mu=\mu^n}$: la matrice hessienne de la fonction L évaluée en $\mu = \mu^n$
 $\left(\text{On note son coefficient à la ligne } j \text{ à la colonne } \xi : H_{j\xi}|_{\mu=\mu^n} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_j \partial \mu_\xi}|_{\mu=\mu^n} \right)$

Principales abréviations

- CEA/LETI/LSIV : Laboratoire hébergeant les travaux
- DRM : Detector Response Matrix : matrice de réponse d'un détecteur à comptage résolu en énergie. C'est une matrice dont on note les coefficients $DRM(c; E)$.
- $T_R f$: Transformée de Radon de la fonction f définie sur un volume.
- CND : Contrôle Non Destructif.
- DECT : Dual Energy - Computed Tomography (tomographie à rayons X bi-énergie).
- TF : Transformée de Fourier
- FBP : Filtered-Back Projection : rétro-projection filtrée
- ART : Algebraic Reconstruction Technique.
- $TV(\mu)$: norme Total Variation défini sur un volume μ .
- ICD : Iterative Coordinate Descent (type d'algorithme introduit par Bouman et al. [1]).
- GC : Gradient Conjugué.
- ML-EM : algorithme Maximum Likelihood - Maximisation Expectation (algorithme introduit par Lange et al [2]).
- ML-TR : algorithme Maximum Likelihood - TRansmission (algorithme introduit par De Man et al. [3]).
- ADMM : algorithme Alternating Direction Method of Multipliers (algorithme introduit par Boyd et al. [4]).
- PCD-CT : (Photon-Counting Detector-Computed Tomography) tomographie à rayons X avec détecteurs à comptage résolu en énergie.
- ROIs : Regions Of Interest (zones d'analyse dans une image).

Table des matières

Introduction	11
I Présentation de la tomographie spectrale à rayons X	13
I.1 La radiographie à rayons X	13
I.2 La mesure tomographique	17
I.3 La détection de rayons X	18
I.3.1 Les détecteurs à base de scintillateur	19
I.3.2 Les détecteurs à base de matériau semi-conducteur	21
I.4 Artéfacts de reconstruction conventionnelle	24
I.4.1 Artéfact d'affaissement	24
I.4.2 Artéfact d'ombrage	25
I.4.3 Artéfact métallique	25
I.5 La décomposition en base de fonction	26
I.6 Systèmes de mesure bi-énergie	28
I.7 Domaines d'application de la tomographie à rayons X	30
I.7.1 Contrôle non destructif	31
I.7.2 Diagnostic médical	32
I.7.3 Sécurité	33
I.8 Conclusion du chapitre	34
II Etat de l'art	35
II.1 Méthodes de reconstruction tomographique	35
II.1.1 Reconstruction analytique	35
II.1.2 Reconstruction itérative algébrique	37
II.1.3 Reconstruction itérative statistique	39
II.1.3.1 La paramétrisation de l'objet	39
II.1.3.2 Le modèle direct	39
II.1.3.3 Le modèle statistique	40
II.1.3.4 Les termes de régularisation/contraintes	42
II.1.3.5 L'algorithme d'optimisation	44
II.2 Reconstruction spectrale	48
II.2.1 Reconstruction spectrale - <i>Two-Step</i>	49
II.2.1.1 Approche <i>Image-Based</i>	49
II.2.1.2 Approche <i>Projection-Based</i>	50
II.2.1.3 Approche <i>Quasi-Monochromatique</i>	55
II.2.1.4 Conclusion sur les approches <i>Two-Step</i>	57
II.2.2 Reconstruction spectrale - <i>One-Step</i>	57
II.2.3 <i>A priori</i> spectraux	60
II.2.4 Covariance dans la décomposition en base de fonction	62
II.3 Calibration du modèle physique de la mesure spectrale	63
II.3.1 Calibration d'un modèle détecteur	63
II.3.2 Estimation d'un spectre efficace explicite	64
II.3.3 Estimation d'un modèle direct modifié	65

III La méthode de reconstruction développée : MLTR-ONE-STEP	67
III.1 Discussion et positionnement par rapport à l'état de l'art	67
III.2 Une méthode de reconstruction <i>One-Step</i> : le MLTR-ONE-STEP	69
III.2.1 La paramétrisation de l'objet	69
III.2.2 Le modèle direct	69
III.2.3 Le modèle statistique	70
III.2.4 Les termes de régularisation/contraintes	71
III.2.5 L'algorithme d'optimisation	72
III.2.5.1 Le ML-TR dans le cas d'une reconstruction scalaire	73
III.2.5.2 Le MLTR-POLY dans le cas d'une reconstruction spectrale sans dis-	
tortion spectrale	73
III.2.5.3 MLTR-ONE-STEP dans le cas d'une reconstruction spectrale avec	
distorsion spectrale linéaire	76
III.3 Implémentation	77
III.4 Conclusion	78
IV Résultats MLTR-ONE-STEP - Données simulées	81
IV.1 Etude d'un cylindre avec 6 inserts de matériaux différents	81
IV.1.1 Présentation du cas d'étude	81
IV.1.2 Etat initial : utilisation d'une méthode <i>Two-Step</i> standard	83
IV.1.3 Reconstruction sans régularisation	85
IV.1.4 Reconstruction avec régularisation	86
IV.1.5 Comparaison des cartes $(f_1; f_2)$ avec et sans régularisation	87
IV.1.6 Comparaison avec une méthode <i>Two-Step</i> standard par zone	88
IV.2 Etude de l'influence des paramètres de la régularisation spatiale	89
IV.2.1 Etude du gradient de l'image	89
IV.2.2 Effet sur les cartes $(f_1; f_2)$	90
IV.3 Etude d'un cylindre avec 6 inserts de même matériau mais de densités différentes . .	92
IV.3.1 Présentation de l'objet	92
IV.3.2 Résultat en reconstruction Eau/Os cortical et Eau/Aluminium	92
IV.4 Influence du nombre de canaux de mesure	93
IV.4.1 Comparaison du résultat final entre 2 et 20 canaux	93
IV.4.2 Etude d'un critère global	94
IV.4.3 Comparaison de la vitesse de convergence entre 2 et 20 canaux	96
IV.4.3.1 Avec état initial	96
IV.4.3.2 Sans état initial	96
IV.4.4 Conclusion sur l'étude sur le nombre de canaux de mesure	97
IV.5 Conclusion du chapitre	98
V Résultats MLTR-ONE-STEP - Données expérimentales	99
V.1 Présentation du cas d'étude - 12 canaux	99
V.1.1 Objet étudié	99
V.1.2 Conditions d'acquisitions	100
V.2 Résultats de la Reconstruction	101
V.3 Conclusion	105
Conclusions et perspectives	107
Bibliographie	111
A Exemple d'images radiographiques	119

B	Algorithmes d'optimisation	120
B.1	Gradient simple et à pas optimal	120
B.2	Algorithme du gradient conjugué	121
B.3	Algorithme d'optimisation alternée - "Variable Splitting"	121
C	Combinaison d'une loi poissonnienne et binomiale	123
D	Calcul du gradient et du hessien du MLTR-ONE-STEP	124
D.1	Calcul du gradient pour le MLTR-ONE-STEP	124
D.2	Calcul du hessien pour le MLTR-ONE-STEP	125
E	Résultats Simulation - Cartes avec ROIs non rognées	128
F	Sinogramme de la mesure expérimentale du chapitre 5	131

Introduction

La tomographie à rayons X est une technologie d'imagerie en trois dimensions. Elle se base sur la transmission de rayons X à travers l'objet étudié. Elle est non destructive mais néanmoins irradiante. Cette technique de visualisation est utilisée principalement dans trois domaines : le diagnostic médical, le contrôle non destructif (détection de défauts dans des pièces industrielles de haute performance) et la sécurité (contrôles aéroportuaires des bagages). La tomographie est aussi utilisée de façon moins routinière dans le cadre de la recherche scientifique comme par exemple l'étude des matériaux. Dans le protocole le plus répandu, un spectre polychromatique de photons traverse l'objet à analyser. Par opposition, une technique moins répandue car plus complexe et moins accessible est l'émission d'une seule raie monochromatique qui nécessite un rayonnement dit "synchrotron" ou une source radio-isotope. Il est à noter que la reconstruction tomographique peut être basée sur d'autres techniques de mesure : tomographie électronique, tomographie sismique ...

Ce manuscrit se place dans le cadre de l'émission d'un spectre polychromatique : des photons dans une gamme énergétique continue sont émis par un générateur à rayon X appelé source. Les photons sont émis vers l'objet et interagissent avec lui. L'interaction entre un photon et la matière dépend de l'énergie du photon. Dans le domaine médical, une forte contrainte est la dose d'irradiation (liée au nombre et à l'énergie des photons envoyés à travers le patient). Celle-ci est limitée et conditionne le bruit photonique, qui peut se révéler source d'erreur dans la reconstruction.

La tomographie à rayons X a fait l'objet de nombreuses recherches depuis sa mise en service au début des années 1990. Pendant de nombreuses années, seuls des systèmes de mesure avec une seule source de rayons X et un détecteur à scintillateur dit "à intégration" étaient présents en routine clinique. Les images reconstruites par ce type de système ne permettent pas de réaliser des études quantitatives (sauf utilisation d'un étalonnage). Seuls les contrastes présents dans les images obtenues peuvent être analysés visuellement. Pour obtenir un résultat quantitatif, il faut étudier la dépendance énergétique des interactions des rayons X avec la matière : on appelle cela la tomographie spectrale.

C'est pourquoi d'autres systèmes de mesure ont été mis au point. Des technologies de mesure bi-énergie sont maintenant commercialisées depuis quelques années par des fabricants comme Philips, Siemens ou GE Healthcare. Par exemple, ces systèmes utilisent une deuxième source réglée différemment ou un deuxième détecteur pour étudier l'interaction de l'objet avec un deuxième spectre polychromatique de photon. Ces systèmes permettent l'obtention d'images donnant des informations quantitatives.

Récemment une autre technologie de détection de rayons X a émergé : la détection directe (détecteurs dit "à comptage" résolus en énergie). Cette nouvelle technologie ouvre des perspectives pour la tomographie à rayons X : elle permet de classer les énergies des photons d'un même spectre

polychromatique dans différents canaux énergétiques. Ainsi le système n'a besoin que d'une seule source standard et d'un seul détecteur pour étudier la dépendance énergétique des interactions. Cependant, le classement des photons mesurés par un détecteur à comptage est complexe. De nouvelles méthodes de traitement doivent être développées pour prendre en compte ce comportement du détecteur. Cela complexifie la reconstruction tomographique spectrale par rapport à la tomographie standard. Ce type de détecteur n'est pas encore utilisé dans des protocoles routiniers et juste quelques prototypes de systèmes utilisant cette technologie existent.

Les techniques conventionnelles de reconstruction (qui utilisent une seule source et un seul détecteur à scintillateur) conduisent à des artéfacts qui détériorent la qualité de l'image. Les systèmes bi-énergie permettent de corriger certains de ces artéfacts. Par contre, les résultats quantitatifs obtenus avec ces systèmes sont encore parfois sujets à des incertitudes trop élevées. Dans la perspective d'améliorer l'aspect quantitatif des résultats obtenus, nous avons développé une nouvelle méthode de reconstruction à partir de la mesure d'un détecteur à comptage résolu en énergie. Elle vise à améliorer la qualité du volume reconstruit en terme d'artéfacts, d'identification des matériaux au sein de l'objet et de la mesure des densités de ceux-ci.

La méthode développée prend en entrée des données directement issues d'un détecteur à comptage pour obtenir un volume en trois dimensions correspondant. L'objectif de cette méthode est une mesure quantitative de l'objet étudié qui passe par l'estimation de densités de matériau. Par exemple, dans le cas d'un examen médical, on cherche la densité en eau de certains organes et la densité des os. Ainsi, en chaque voxel de l'image reconstruite sont obtenues plusieurs densités de matériau. On peut comparer cette multi-information en chaque voxel au cas des téléviseurs LCD : en chaque pixel de l'écran se trouve trois sous-pixels (ou cellules) contenant un niveau de couleur (rouge, bleu ou vert). C'est pourquoi la technologie étudiée dans ce manuscrit est parfois appelée imagerie à rayons X couleur.

Ce manuscrit comporte cinq chapitres. Le premier chapitre introduit le principe de la tomographie à rayons X et les notations utilisées dans ce rapport de thèse. Il présente aussi les deux types de détecteurs à rayons X et les artéfacts communément observés en tomographie. Il finit par introduire les enjeux et les objectifs des différents domaines d'application de ce système d'imagerie et comment la tomographie spectrale peut être pertinente dans ces domaines.

Nous dressons un état de l'art des méthodes de reconstruction dans le deuxième chapitre. De nombreuses approches existent et nous proposons des classifications de ces approches. Une première sous-partie du chapitre s'intéresse au cas de la tomographie standard et une deuxième au cas de la tomographie spectrale.

La méthode de reconstruction et l'algorithme que nous avons développés sont présentés dans le chapitre 3. Cette méthode est ensuite appliquée à des données issues de la simulation et les résultats obtenus sont exposés dans le chapitre 4. Ces résultats permettent de valider le fonctionnement de la méthode.

Le chapitre 5 traite de l'application de notre méthode à un cas réel expérimental avec 12 canaux. L'obtention de résultats expérimentaux avec des détecteurs à comptage résolu en énergie avec plus de 6 canaux n'est pas encore répandue. Ici au laboratoire CEA/LETI/LSIV se trouve un système de mesure tomographique utilisant cette technologie. Les difficultés rencontrées ainsi que les images reconstruites avec ce système sont détaillées dans le chapitre 5.

Le manuscrit se termine par une conclusion ainsi que la présentation de pistes de développements ultérieurs pour notre méthode.

Chapitre I

Présentation de la tomographie spectrale à rayons X

Dans ce premier chapitre, nous introduisons la tomographie spectrale à rayons X et les notations utilisées dans ce rapport. Nous rappelons dans les trois premières parties les éléments constituant le système de mesure et présentons le formalisme utilisé pour décrire la physique de ce système. Ce chapitre introduit aussi les grandes problématiques de la reconstruction tomographique spectrale ainsi que certaines hypothèses que nous faisons dans notre travail. Il se termine par la présentation des domaines d'application de la tomographie à rayons X.

I.1 La radiographie à rayons X

Avant de définir le principe de la tomographie, nous introduisons le système de mesure par radiographie à rayons X. Dans cette configuration d'examen, toutes les parties du système sont immobiles.

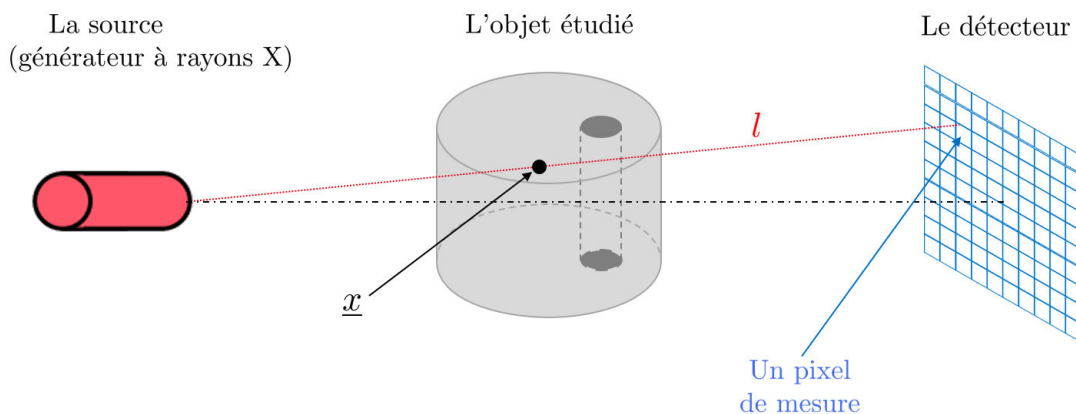


FIGURE I.1 – Schéma d'un système de mesure radiographique.

Les trois principales parties de système de mesure radiographique sont la source (un générateur à rayons X), l'objet étudié (et son support) et le détecteur (cf figure I.1). Nous les détaillons dans la suite.

La source : Comme mentionné en introduction, ce travail de thèse se place dans le cas d'une source polychromatique. Il s'agit d'un générateur à rayons X qui émet des photons à différentes énergies. Ce nombre de photons par énergie est appelé spectre d'émission de la source. En pratique, une tâche focale d'émission est observée sur les générateurs. Nous faisons dans ce travail l'hypothèse que la source est ponctuelle.

Plusieurs paramètres caractérisent le spectre d'émission. Premièrement, la tension électrique alimentant le générateur délimite la borne supérieure énergétique du spectre. Deuxièmement l'intensité du générateur ainsi que le temps d'exposition (durée pendant laquelle la mesure est effectuée) pilotent le nombre total de photons en sortie du générateur. La source est considérée dans le cas général orthotrope (ou lambertienne), ce qui suppose que le nombre de photons est identique dans toutes les directions (constant par valeur d'angle solide identique). Cette hypothèse est juste dans un certain angle solide autour de la direction principale d'émission et cet angle est suffisant pour les géométries usuelles. Ainsi la source est caractérisée par un spectre énergétique de photons par milliampère-seconde (mA.s) d'exposition et par angle solide (unité stéradian : Sr). Les valeurs fixées pour ces paramètres interviennent dans le calcul de la dose radiative exprimée en Gray (dose absorbée) ou en Sievert (dose efficace). Dans de nombreux examens, en particulier médicaux, les rayons des plus faibles énergies ne traversent jamais l'objet d'étude. Ils constituent donc un apport de dose radiative inutile. Pour pallier cet effet, une filtration en sortie de la source à base de métal est souvent utilisée.

La figure I.2 illustre un exemple de spectre incident utilisé dans le cadre d'un examen médical. Les générateurs ont généralement une anode en tungstène et la tension d'accélération est fixée entre 70 à 150 kV . On voit apparaître les raies caractéristiques du tungstène à 59 keV et 67 keV .

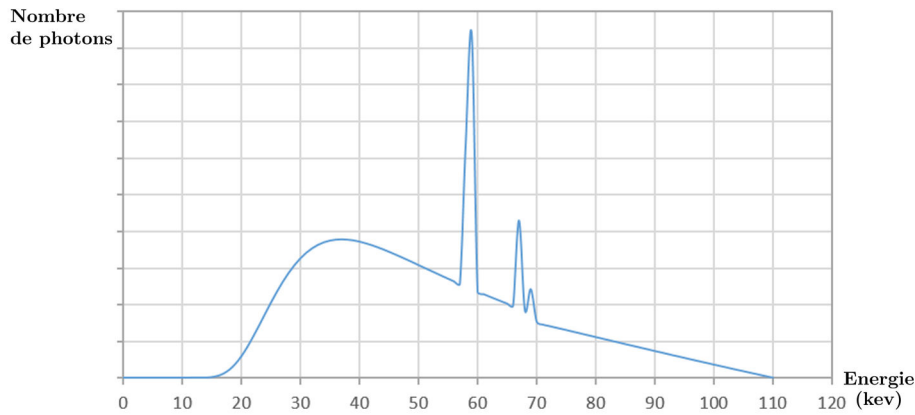


FIGURE I.2 – Exemple de spectre incident d'un générateur avec une anode en tungstène, une tension de 110 kV et un filtrage de 2,5 mm d'aluminium (Nombre de photons par mA.s par Sr).

L'objet : Il est caractérisé par son coefficient d'atténuation linéique μ . Ce coefficient est introduit à partir d'une loi d'atténuation de type Beer-Lambert où le nombre de photons à une énergie E atténués à travers un objet uniforme est donné par la formule I.1 :

$$N^{att}(E) = N^0(E)e^{-att(E)} = N^0(E)e^{-\mu(E)L} \quad (I.1)$$

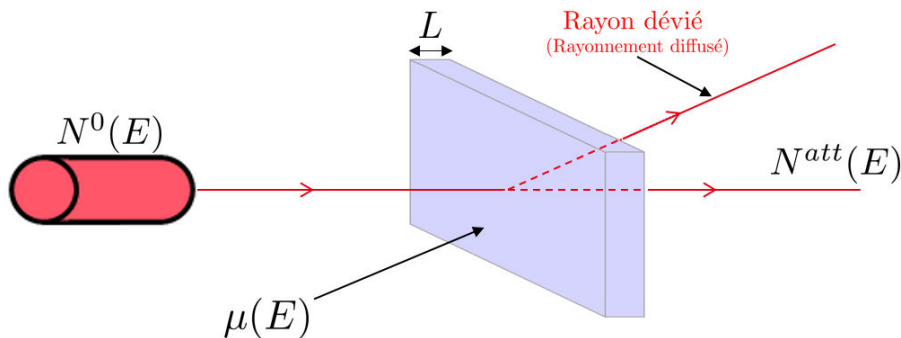


FIGURE I.3 – Loi d'atténuation de Beer-Lambert.

Un exemple d'image en nombre de photons atténués est disponible dans l'annexe A.

$N^0(E)$ est le nombre de photons incidents à l'énergie E , $N^{att}(E)$ le nombre de photons atténués après l'objet et L la longueur de l'objet traversé. Ce modèle ne prend pas en compte la présence de rayonnement diffusé qui est composé de photons déviés de leur trajectoire rectiligne par l'objet et qui sont donc détectés dans un autre pixel de mesure (cf figure I.3). Pour contrer ce phénomène des collimateurs sont placés en sorties des générateurs à rayons X. Il est possible d'utiliser des grilles anti-diffusion devant le détecteur pour bloquer les rayons déviés de leur trajectoire. Une autre approche possible est le traitement des mesures de façon à corriger numériquement le rayonnement diffusé [5].

Dans le cas d'un objet non uniforme, le nombre de photons atténués peut être modélisé en intégrant le long du chemin l_i du rayon i :

$$N_i^{att}(E) = N^0(E)e^{-att_i(E)} = N^0(E)e^{-\int_{\underline{x} \in l_i} \mu(\underline{x}, E) d\underline{x}} \quad (I.2)$$

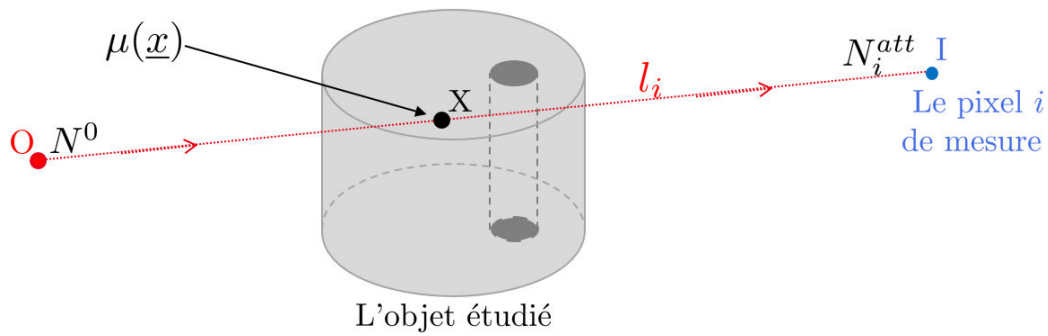


FIGURE I.4 – Projection d'un volume le long d'un chemin de rayon l_i (i.e. de la droite (OI)).

Dans un plan, la fonction mathématique qui pour une droite donnée (un chemin de rayon l_i), donne la projection d'une fonction selon cette direction est appelée fonction de Radon. Dans un espace à deux dimensions, une direction de projection (ou droite) peut-être caractérisée par deux paramètres : un angle θ et une translation t depuis l'origine d'un repère. Ainsi la transformée de Radon de $f(x; y)$ s'écrit en deux dimensions :

$$T_R f(t; \theta) = \int_s f(t \cdot \cos(\theta) - s \cdot \sin(\theta); t \cdot \sin(\theta) + s \cdot \cos(\theta)) ds \quad (I.3)$$

Ainsi dans un plan, l'atténuation définie comme $\int_{\underline{x} \in l_i} \mu(\underline{x}) d\underline{x}$ est la transformée de Radon de μ .

Le coefficient d'atténuation linéique traduit l'interaction des photons avec l'objet d'étude. La nature et l'intensité de ces interactions avec la matière dépend de l'énergie du photon incident et du matériau traversé. Quatre interactions sont à l'origine de l'atténuation d'un photon par la matière : l'effet photoélectrique, la diffusion Compton, la diffusion Rayleigh et la création de paire (phénomène qui n'a pas lieu entre 0 et 150 keV) (cf figure I.5).

Dans la suite, nous ne considérerons que l'atténuation totale d'un objet. Cette atténuation peut être décomposée en deux facteurs : la densité du matériau ρ (en $g.cm^{-3}$) et une fonction $\tau(E)$ qui dépend de l'énergie et qui est caractéristique de la composition chimique du matériau de l'objet étudié (en particulier de son numéro atomique Z) :

$$\mu(E) = \rho \times \tau(E) \quad (I.4)$$

$\tau(E)$ est appelé coefficient d'atténuation massique et s'exprime en $cm^2.g^{-1}$.

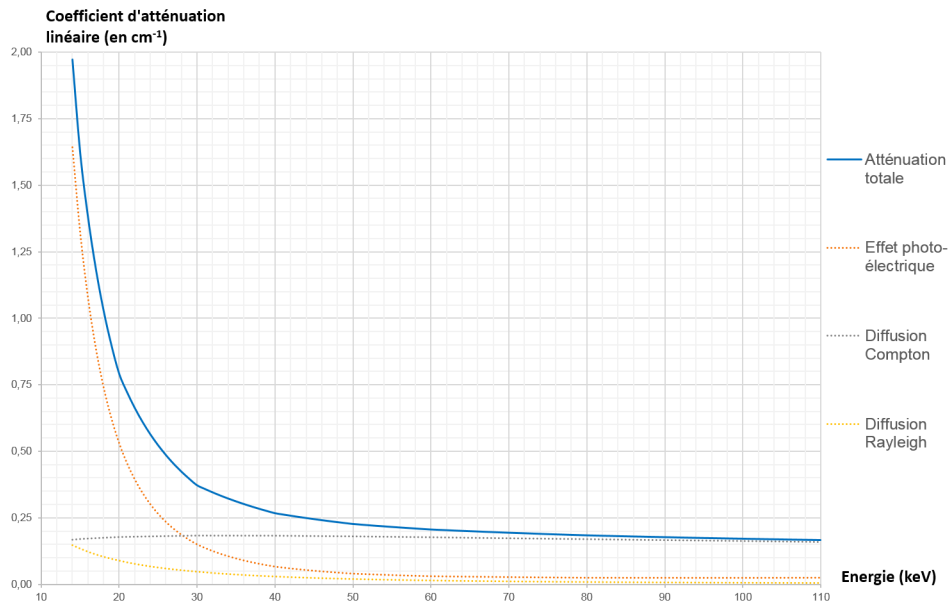


FIGURE I.5 – Coefficient d'atténuation linéique de l'eau (et influence des différents effets physiques).

La figure I.5 montre que l'atténuation des photons ne dépend pas linéairement de l'énergie. La conséquence de cette propriété est qu'un spectre en photons atténués n'est pas proportionnel au spectre d'émission (cf figure I.6). Etant donnée la variabilité énergétique du spectre incident $N^0(E)$ et du coefficient d'atténuation linéique $\mu(E)$, la radiographie présente donc un aspect spectral.

La figure I.6 compare le spectre incident et le spectre atténué à travers 2 cm d'eau pure. A cause de la variabilité énergétique du coefficient d'atténuation linéique (cf figure I.5), le rapport entre les deux spectres n'est pas constant. De plus, comme les photons aux plus basses énergies sont plus atténués, on observe que la moyenne énergétique du spectre atténué est plus élevée que celle du spectre incident : ce phénomène est appelé *durcissement de spectre*.

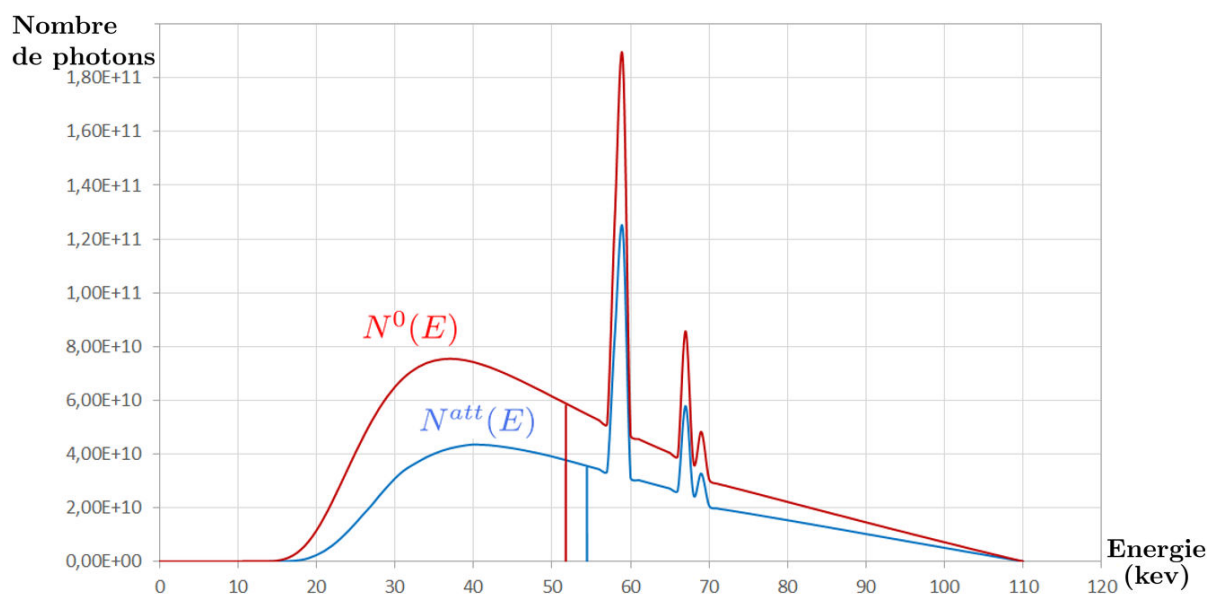


FIGURE I.6 – Spectre incident $N^0(E)$ et atténué $N^{att}(E)$ à travers 2 cm d'eau.
(Les traits verticaux figurent les moyennes des spectres.)

I.2 La mesure tomographique

Le principe de la mesure tomographique est d'acquérir des images radiographiques de l'objet sous plusieurs angles de vue. Ainsi un mouvement de rotation est appliqué au système de mesure. Soit l'objet (et son support) tourne sur lui-même, soit la source et le détecteur tournent autour de l'objet de manière équivalente. Ce deuxième cas est la configuration dans le cadre d'un examen médical (cf figure I.7) où le patient est immobile. Cela engendre néanmoins un encombrement du système plus important.



FIGURE I.7 – Illustration d'un scanner à rayons X pour examen médical (source : swedish.org [6]).

Dans la suite de ce rapport, nous nous intéressons à la tomographie à rayons X à une seule tranche : nous cherchons à reconstruire un volume en trois dimensions mais dont la troisième dimension vaut 1. Il s'agit de la dimension parallèle à l'axe de rotation du système de scanner. Dans ce cas, un détecteur dit "linéaire" peut être utilisé (cf figure I.8). Il s'agit d'un détecteur à plusieurs colonnes mais avec une seule ligne de pixels. Ce type de détecteur permet de limiter la mesure de rayonnement diffusé. Dans le cas d'une reconstruction tomographique à plusieurs tranches (en trois dimensions), le rayonnement diffusé serait plus important et engendrerait plus d'erreur.

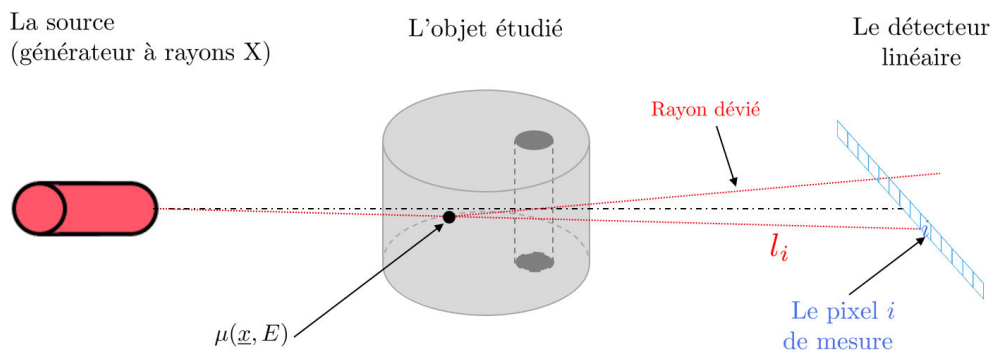


FIGURE I.8 – Illustration de la mesure radiographique avec un détecteur linéaire.

L'objectif de la reconstruction tomographique est de reconstruire un volume à partir des mesures radiographiques acquises à chaque angle de vue. Pour cela il faut définir géométriquement la zone spatiale que l'on veut reconstruire (cf figure I.9) : position, taille et résolution. On reconstruit ainsi un volume voxelisé : μ_j représente la valeur du coefficient d'atténuation linéique dans le j^e voxel. Une acquisition tomographique autour de l'objet d'étude est caractérisée par sa géométrie d'acquisition : nombre d'angles de vue, espacement angulaire entre chaque angle de vue, distance source-objet, distance source-détecteur... Une manière simple (parmi d'autres possibilités) de caractériser cette géométrie est la définition d'une matrice A appelée *matrice système* ou *matrice de projection*. Le coefficient A_{ij} de cette matrice représente la longueur de l'intersection du voxel j avec le rayon l_i (rayon qui va de la source au pixel détecteur i) (cf figure I.9). Cette matrice de

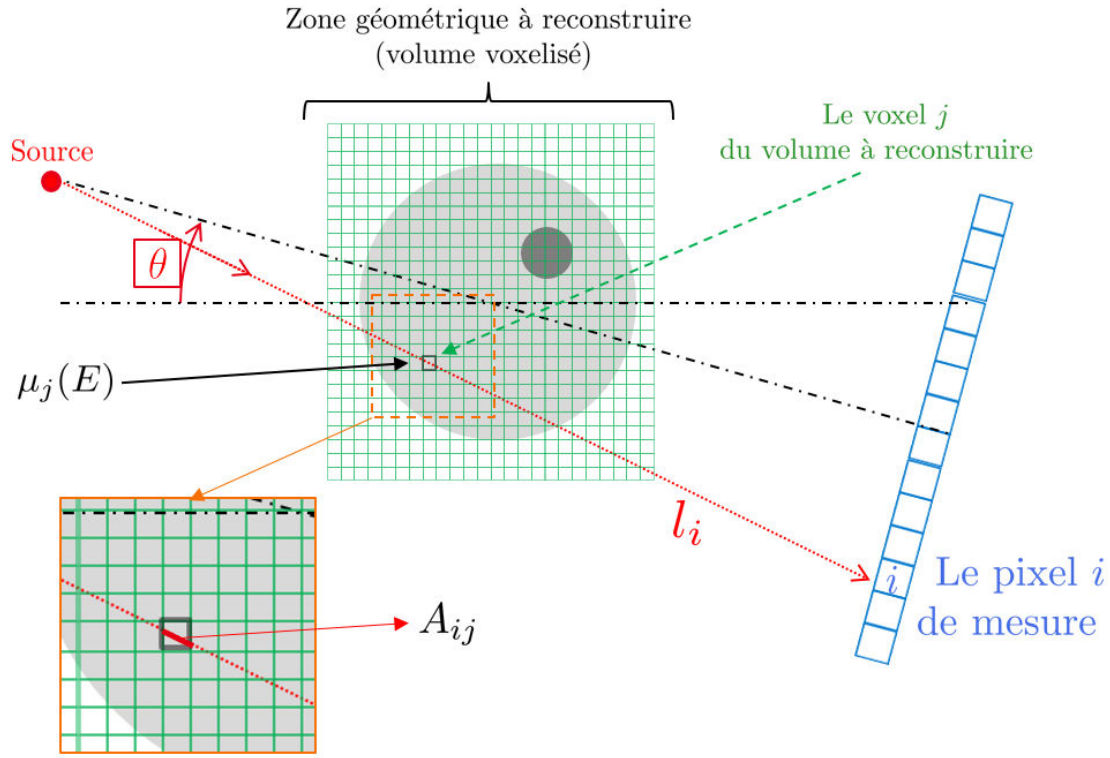


FIGURE I.9 – Illustration de la zone géométrique à reconstruire et de la matrice système.

projection est de très grande taille (taille nombre de pixels $N_p \times$ nombre de voxels N_v) mais très creuse. Elle permet de réaliser de façon discrète l'opération de projection (transformée de Radon) :

$$\text{Projection discrète : } att_i(E) = \int_{\underline{x} \in l_i} \mu(\underline{x}, E) dx = \sum_{j=1}^{N_v} A_{ij} \mu_j(E) \quad (I.5)$$

L'acquisition tomographique est réalisée par plusieurs rotations successives du système physique. Chaque angle de vue apporte une information différente. En pratique, chaque angle de vue est mesuré avec le même détecteur physique. Dans le cas de la reconstruction tomographique à une tranche, on peut représenter les données sous forme de sinogramme (cf figure I.10). Il s'agit d'un mode de représentation où on assemble les différents angles de vue mesurés avec un détecteur linéaire. Chaque ligne de l'image (trait bleu sur la figure I.10) représente une mesure du détecteur linéaire à un angle donné et chaque valeur d'une même colonne est mesurée par le même pixel physique. Dans ce rapport, i désigne un pixel du sinogramme, p un pixel physique et n_θ un angle de vue. Dans un sinogramme, on a la relation : $i = n_\theta N_d + p$ où N_d est le nombre de pixels physiques sur un détecteur (cf figure I.10) et $p \in [1; N_d]$.

I.3 La détection de rayons X

Nous avons montré comment les photons sont atténués à travers l'objet en fonction de leur énergie et des matériaux traversés. Nous introduisons maintenant les différents types de détecteurs à rayons X et leur modélisation. A partir d'un nombre de photons atténués par l'objet en entrée de celui-ci, un détecteur fournit un signal électrique exploitable pour la reconstruction tomographique. Les premiers détecteurs à être mis en service ont été les détecteurs à base de scintillateur. Plus récemment des nouveaux détecteurs à base de semi-conducteur ont été développés. Nous allons détailler la mesure que fournit chacun de ces deux types de détecteur.

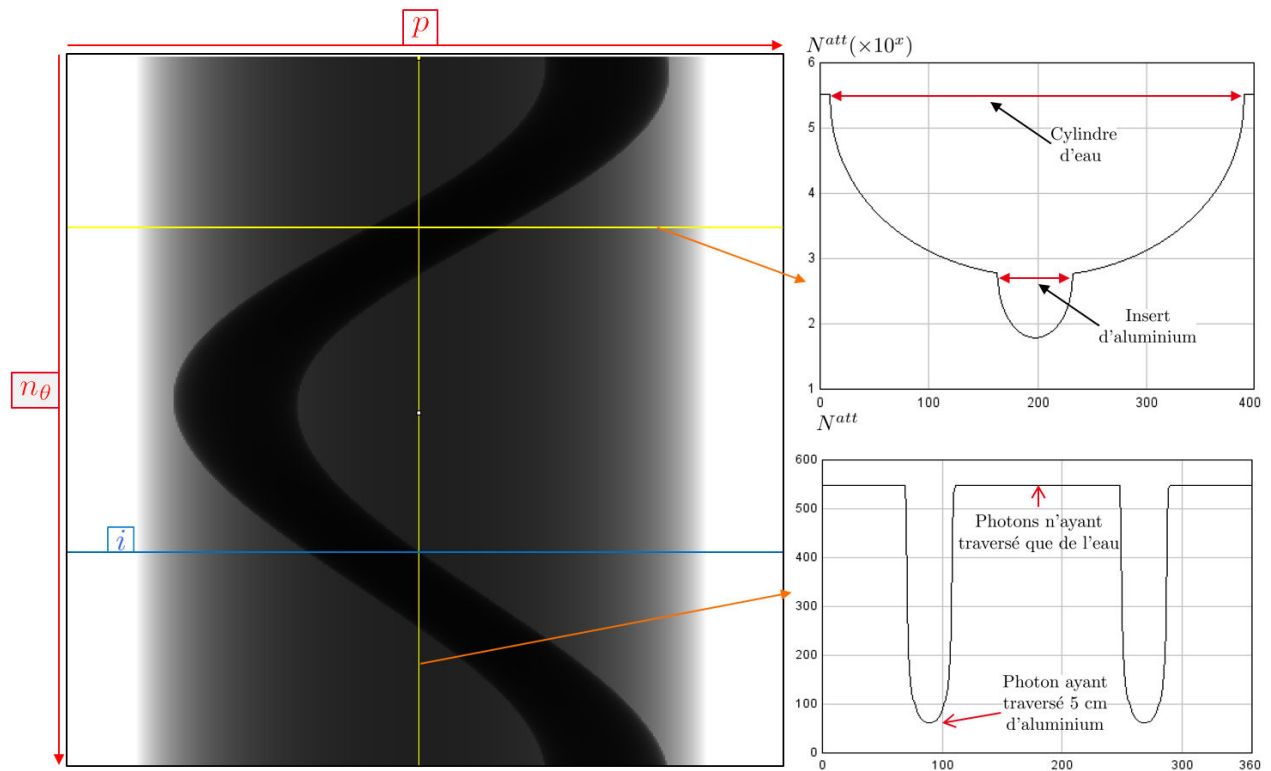


FIGURE I.10 – A gauche : Sinogramme en nombre de photons atténués mesuré pour l'objet de la figure I.9 : un cylindre en eau avec un insert d'aluminium (matériau dur) : 360 angles de vues \times 400 pixels physiques.
 A droite : en haut : profil horizontal avec échelle logarithmique ;
 en bas : profil vertical (pixel central du détecteur physique).

I.3.1 Les détecteurs à base de scintillateur

Nous présentons ici le cas le plus courant de détecteurs à base de scintillateur, appelés aussi détecteurs à intégration (Pour plus de détails, consulter [7]).

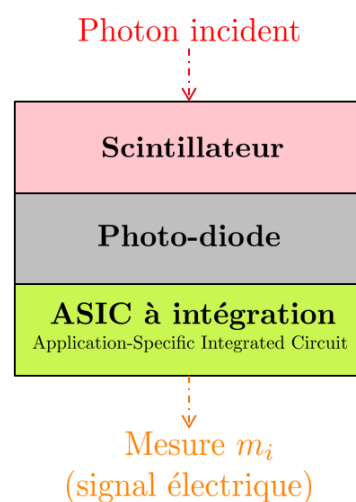


FIGURE I.11 – Schéma de fonctionnement d'un détecteur à intégration composé d'un matériau scintillateur, d'une photo-diode et d'un circuit intégré.

Les détecteurs à base de scintillateur sont dits à détection indirecte. En effet, le principe de leur fonctionnement est de transformer le photon incident en un photon de longueur d'onde visible. Ceci est le rôle du scintillateur (cf figure I.11). Ensuite le photon visible est détecté à l'aide d'une

photo-diode et d'un ASIC à intégration (Application-Specific Integrated Circuit : i.e. circuit intégré) pour le transformer en signal électrique. La mesure en sortie est proportionnelle à l'énergie déposée dans la photo-diode. Ainsi on peut modéliser la mesure m_i en sortie au pixel i comme :

$$m_i = \int_{E=1}^{N_E} D(E) N_i^{att}(E) dE \quad (I.6)$$

où N_E est l'énergie maximale du spectre d'émission, et $D(E)$ la sensibilité du détecteur qui dépend de l'énergie du photon entrant dans le détecteur. Un exemple de sensibilité est tracé sur la figure I.12. On peut en première approximation estimer qu'elle est proportionnelle à l'énergie : $D(E) \sim E$.

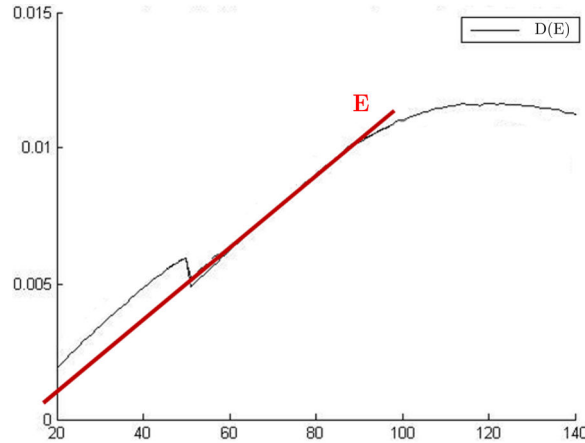


FIGURE I.12 – Sensibilité d'un détecteur à intégration à base de GOS (Gd_2O_2S : Oxysulfate de Gadolinium).

Comme le nombre de photons incidents n'est pas connu, on utilise la mesure dite en atténuation qui est la grandeur p_i (combinaison des équations I.2, I.5 et I.6) :

$$p_i = -\ln\left(\frac{m_i}{m^0}\right) = -\ln\left(\frac{\int_{E=1}^{N_E} E N^0(E) e^{-\sum_{j=1}^{N_v} A_{ij} \mu_j(E)} dE}{\int_{E=1}^{N_E} E N^0(E) dE}\right) \quad (I.7)$$

où m^0 est la mesure plein flux : la mesure sans l'objet.

On peut démontrer que cette valeur donne au 1^{er} ordre :

$$p_i = \frac{\int_{E=1}^{N_E} E N^0(E) \sum_{j=1}^{N_v} A_{ij} \mu_j(E) dE}{\int_{E=1}^{N_E} E N^0(E) dE} = \sum_{j=1}^{N_v} A_{ij} < \mu_j > \quad (I.8)$$

où $< \mu_j > = \frac{\int_{E=1}^{N_E} E N^0(E) \mu_j(E) dE}{\int_{E=1}^{N_E} E N^0(E) dE}$ est un coefficient d'atténuation moyen qui dépend de l'objet mais

aussi des conditions d'acquisitions. Cela est un inconvénient car il n'a pas une signification physique intrinsèque. On l'appelle " μ au sens système". Pour standardiser les images issues de reconstruction tomographique l'unité de Hounsfield (HU) a été introduite. C'est une transformation linéaire du coefficient d'atténuation : $HU_j = 1000 \times (< \mu_j > - \mu_{eau}) / \mu_{eau}$. L'équation I.8 au premier ordre ne fait plus apparaître le nombre de photons incidents $N^0(E)$ et permet la linéarisation du modèle.

I.3.2 Les détecteurs à base de matériau semi-conducteur

Les détecteurs à base de semi-conducteur sont dits à détection directe. Au laboratoire du CEA/LETI/LSIV, leur développement est un axe de recherche majeur. Dans cette technologie, le matériau semi-conducteur qui absorbe un photon X le transforme directement en signal électrique (en sortie de l'anode du pixel). Ainsi un gain électrique est mesurable en sortie du pixel de mesure. Plus précisément, un photon absorbé dans le semi-conducteur déclenche un nuage électronique dans le matériau de détection. Ce matériau est entouré par deux électrodes (I.13) et le nuage électronique migre vers l'anode. Ce phénomène provoque une impulsion électrique convertie en gain électrique par l'ASIC du pixel.

Dans le cas que nous considérons ici, l'ASIC du pixel fonctionne en mode comptage. De plus, il permet une discrimination énergétique des impulsions électriques, classées selon leur intensité dans différents canaux de mesure. Chaque canal possède une borne inférieure et une borne supérieure appelées aussi seuils. Par opposition aux détecteurs à base de scintillateur qui ne fournissent qu'une mesure scalaire par pixel, la mesure en sortie de ces détecteurs est un vecteur par pixel de mesure ayant pour taille le nombre de canaux N_c :

$$[m_i]_{N_c} = \begin{pmatrix} m_i^1 \\ \cdot \\ m_i^c \\ \cdot \\ m_i^{N_c} \end{pmatrix} \quad (I.9)$$

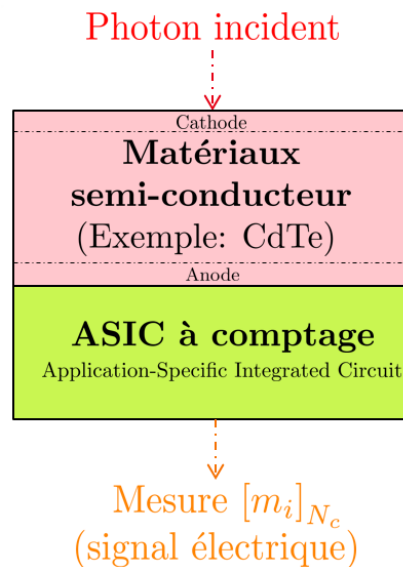


FIGURE I.13 – Schéma de fonctionnement d'un détecteur à base d'un matériau semi-conducteur.

Les phénomènes d'ionisation créent un nuage électronique dans le pixel de mesure qui va ensuite déclencher une impulsion électrique. Idéalement cette impulsion est proportionnelle à l'énergie du photon incident. Cependant plusieurs phénomènes physiques inhérents à la détection directe viennent complexifier la mesure : la fluorescence et le partage de charge.

La fluorescence provoque une impulsion proportionnelle à l'énergie incidente moins une constante (qui dépend du matériau semi-conducteur) et une autre impulsion d'intensité constante et indépendante de l'énergie incidente. D'autre part, le partage de charge est un phénomène qui traduit le fait que l'absorption d'un photon n'est pas ponctuelle : le nuage électrique dû à l'absorption s'étend dans l'espace dans le matériau détecteur. Ce nuage a une certaine dimension dans l'espace et il

provoque des impulsions électriques dans plusieurs pixels. Ainsi, dans la figure I.14, le nuage électronique est partagé sur quatre pixels, créant un signal électrique simultanément dans chacun d'eux. Ils vont produire un gain électrique d'intensité inférieure au cas d'un nuage électronique confiné à un seul pixel.

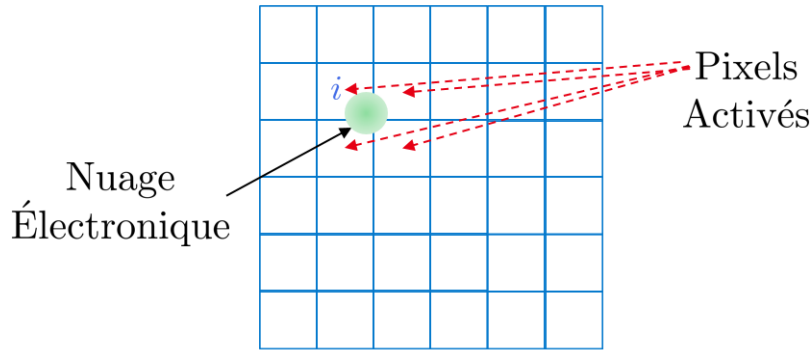


FIGURE I.14 – Illustration du phénomène de partage de charge.

Si l'on observe la réponse moyenne d'un pixel de mesure à une excitation provoquée par des photons à l'énergie de 60 keV , on observe la réponse normalisée tracée sur la figure I.15.

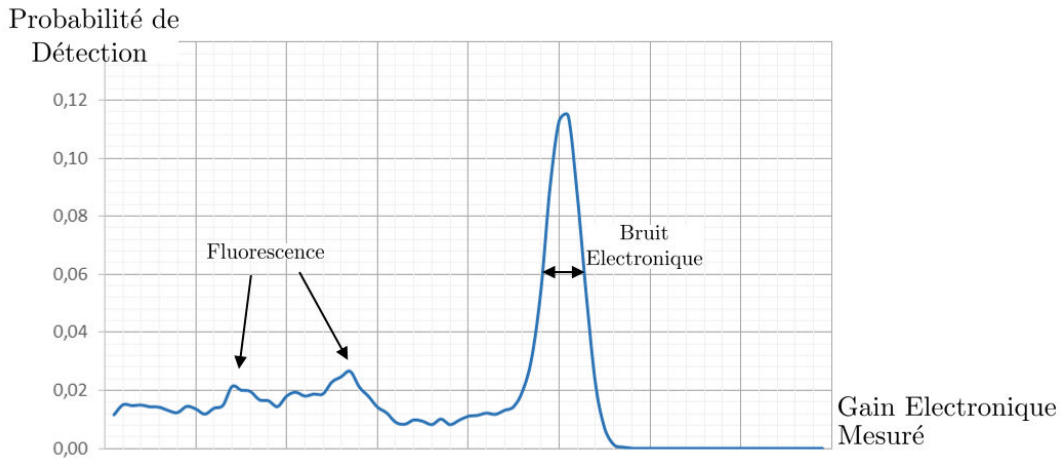


FIGURE I.15 – Réponse moyenne simulée d'un pixel à détection directe à une excitation de 60 keV pour un détecteur barette (linéaire) à base de CdTe avec pixel de taille $500 \mu\text{m}$.

On remarque sur la figure I.15 le pic principal, qui permet de relier le gain électronique mesuré à l'énergie E' dite de sortie du détecteur. On remarque aussi le bruit électronique et les deux pics de fluorescence. Les autres valeurs non nulles sont produites par le partage de charge et le bruit électronique résiduel. Tous ces phénomènes font partie de la réponse du détecteur qui peut être caractérisée par une *DRM* (*Detector Response Matrix*) comme présenté sur la figure I.16.

On peut modéliser ces phénomènes au sein du détecteur dans le canal c (défini par une borne inférieure E'_{\min_c} et supérieure E'_{\max_c}) par :

$$m_i^c = \int_{E=1}^{N_E} \left(\int_{E'=E'_{\min_c}}^{E'_{\max_c}} DRM(E'; E) N_i^{att}(E) dE' \right) dE \quad (\text{I.10})$$

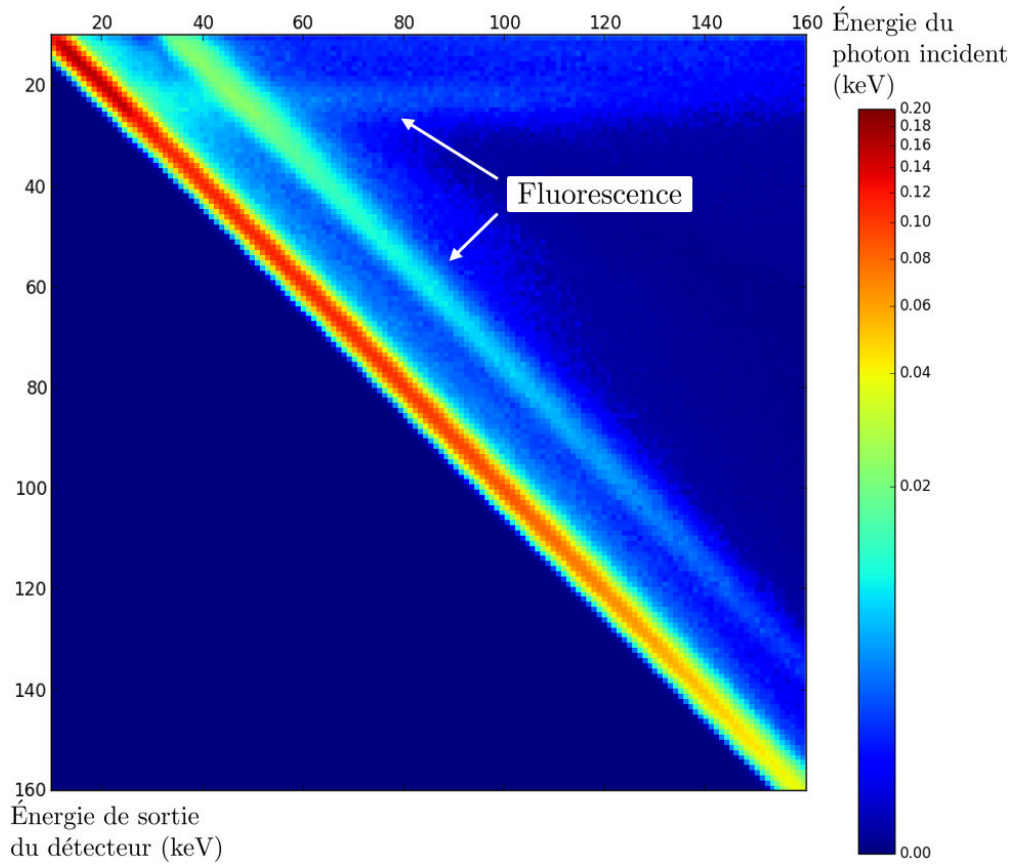


FIGURE I.16 – Detector Response Matrix (*DRM*) issue d'une modélisation prenant en compte le partage de charge pour une taille de pixel de $500\mu m$ et le phénomène de fluorescence.

Pour des questions de notations et de discrétisation énergétique on note :

$$DRM(c; E) = \int_{E'=E'_{min_c}}^{E'_{max_c}} DRM(E'; E) dE' \quad (I.11)$$

En pratique, la *DRM* présente une variation d'un pixel à l'autre et la caractérisation linéaire d'un détecteur est une matrice indexée par l'indice pixel physique p (cf figure I.10) : DRM_p . Le modèle physique de la mesure est alors (combinaison des équations I.10 et I.11) :

$$m_i^c = \int_{E=1}^{N_E} DRM_p(c; E) N_i^{att}(E) dE \quad \text{où l'indice pixel } i = n_\theta \cdot N_p + p \quad (I.12)$$

Dans la suite de ce rapport et pour des questions de clarté, nous remplaçons l'indice p par l'indice i (la valeur de i et de N_p impliquant la connaissance de p).

Si l'on cherche à calculer la même valeur de projection par canal $p_i = -\ln\left(\frac{m_i^c}{m_{0c}^c}\right)$ qu'avec le détecteur à intégration, on obtient de la même manière un " μ moyen au sens système", qui dépend de l'objet, des conditions d'acquisitions et des bornes du canal c .

A fort flux de photons, un autre phénomène électronique se produit : les empilements. En effet, la détection électronique se fait sur une certaine durée. Si un photon arrive dans le détecteur avant que le précédent ait fini d'être analysé, il se produit le phénomène dit d'empilement schématisé sur la figure I.17. Il peut être évité dans une certaine mesure en travaillant à faible flux de photons. Sinon le nombre de photons mesurés est sous-estimé et il y a un durcissement du spectre. En cas d'empilements, la réponse du détecteur ne peut pas être considérée linéaire (caractérisée par une matrice).

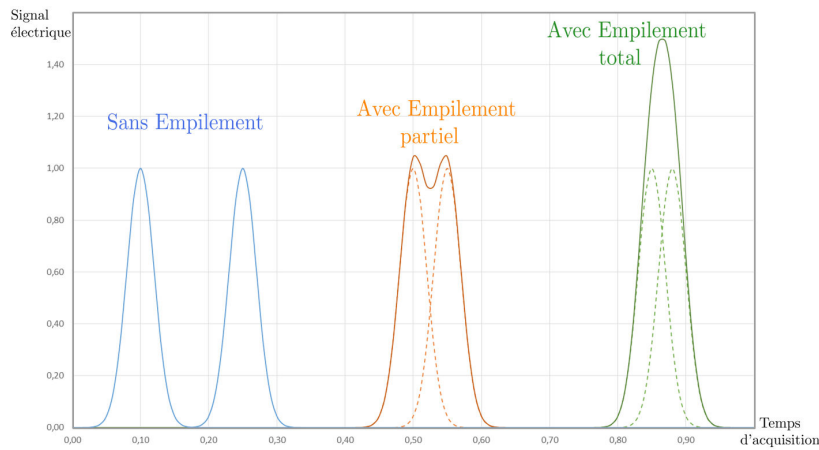


FIGURE I.17 – Illustration du phénomène d'empilement.

I.4 Artéfacts de reconstruction conventionnelle

A cause de l'approximation évoquée dans l'équation I.8, les reconstructions à partir de ces mesures présentent des artéfacts. Les trois principaux sont illustrés dans cette partie. Il est à noter que d'autres artéfacts existent tel que l'artéfact d'anneau ("ring artéfact"). Cet artéfact est causé par l'inhomogénéité de la réponse entre les pixels du détecteur (voire un pixel défectueux dans le cas extrême). Les artéfacts que nous présentons ici sont dus à des approximations dans les méthodes de reconstruction en atténuation.

I.4.1 Artéfact d'affaissement

Pour illustrer cet artéfact, appelé aussi "cupping artéfact" dans la littérature, nous reprenons l'exemple du cylindre avec un fond en eau, toujours avec émission d'un spectre polychromatique. Cependant il contient maintenant deux inserts : un insert en aluminium et un autre en os cortical. Nous traçons les profils au sein d'un même matériau dans la figure I.18. Au lieu d'observer une

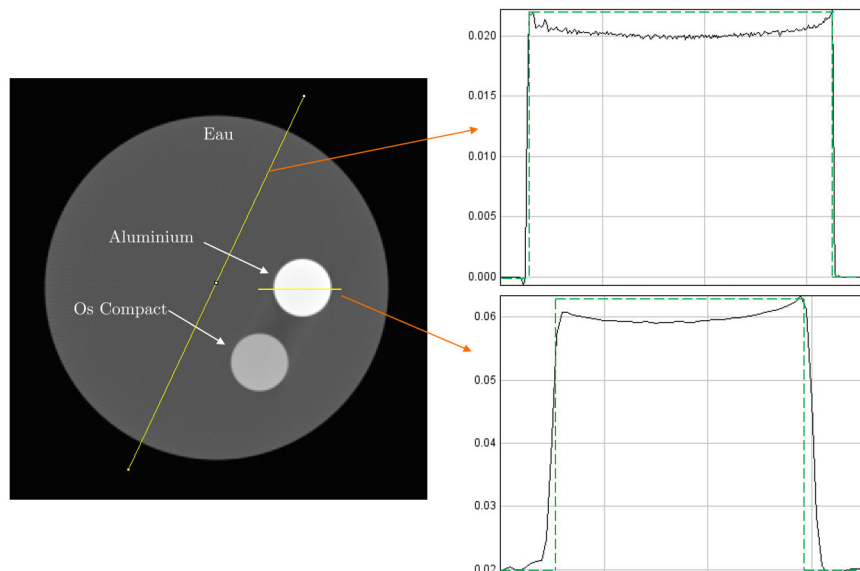


FIGURE I.18 – Illustration de l'artéfact d'affaissement.

forme de créneau parfaite comme attendu, le profil s'affaisse au cœur d'un matériau et sous-estime la valeur de μ . Il est à noter que le profil tracé en pointillé vert sur la figure I.18 n'est pas exactement la valeur vraie. En effet, on reconstruit un " μ au sens système" (cf équation I.8) et on tire des informations principalement des contrastes observés (en unité HU).

L'artéfact d'affaissement est dû au fait que le problème est linéarisé : $p = A < \mu >$ (en négligeant la dépendance énergétique de $\mu(E)$). Cette dépendance énergétique engendre un durcissement du spectre au fur et à mesure que les photons traversent l'objet. Un durcissement de spectre signifie une énergie moyenne plus élevée (cf figure I.6) et donc un coefficient d'atténuation plus faible. Or si l'on considère que le spectre ne se durcit pas, la reconstruction compense par un μ plus faible (cf figure I.19).

I.4.2 Artéfact d'ombrage

A partir du même cas que celui précédemment décrit, on s'intéresse à la zone entre deux matériaux fortement atténuants (l'aluminium et l'os). L'artéfact que nous étudions ici est aussi référencé par l'appellation "streaking artefact" dans la littérature. Pour les mêmes raisons que celles décrites dans le cas de l'artéfact d'affaissement, on observe une zone d'ombre délimitée par les rayons passant à travers les matériaux durs (aluminium et os) : zoom figure I.19.

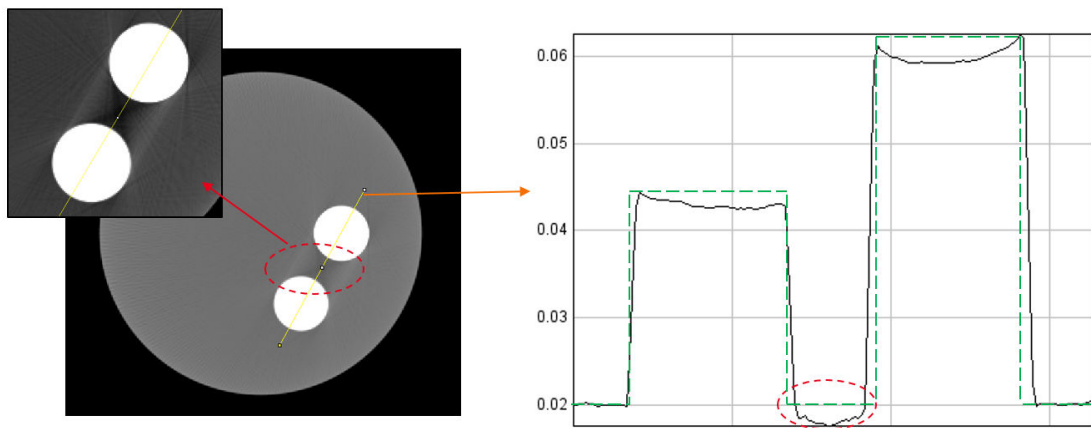


FIGURE I.19 – Illustration de l'artéfact d'ombrage.

I.4.3 Artéfact métallique

Dans le cas de la présence de métal, matériau très fortement atténuant, un artéfact dit métallique en forme d'étoile blanche apparaît sur l'image (cf figure I.20).



FIGURE I.20 – Illustration de l'artéfact métallique (Source : B. De Man, 2001 [3]).

Cet artéfact est dû à un mélange de causes [3] [8] : le durcissement de spectre (comme les deux artéfacts précédents), la présence de rayonnement diffusé et le bruit. La présence de métal dans l'objet atténue très fortement le nombre de photons qui est ainsi très faible voire nul dans certains pixels de mesure. Cela entraîne une atténuation très forte voire non définie. Cet artéfact a fait l'objet de beaucoup d'études afin d'être réduit : les méthodes MAR (Metal Artifact Reduction) [9]. Par exemple, on peut identifier les pixels plus impactés et les isoler lors de la reconstruction.

Une méthode pour diminuer les artéfacts présentés est la prise en compte de la variation énergétique du coefficient d'atténuation. Une manière très répandue d'appréhender celle-ci est la décomposition en base de fonction présentée dans la partie suivante.

I.5 La décomposition en base de fonction

Une hypothèse communément utilisée dans le domaine de la tomographie à rayons X spectrale est la décomposition en base de fonction. Cette hypothèse a été introduite par Alvarez [10]. Elle énonce qu'il existe deux matériaux de bases (dont les coefficients d'atténuation linéiques sont $\phi_1(E)$ et $\phi_2(E)$) tels que le coefficient d'atténuation linéique $\mu(E)$ de tout matériau peut se décomposer comme suit :

$$\mu(E) = f_1\phi_1(E) + f_2\phi_2(E) \quad (I.13)$$

f_1 et f_2 sont appelés les densités en matériau de base (sans unité). Ces densités peuvent être négatives. Cette décomposition est justifiée dans le cadre où le matériau n'est pas très fortement atténuant (numéro atomique supposé peu élevé) et des énergies inférieures à 200 keV sont considérées. Il est aussi possible de décomposer le coefficient d'atténuation sur les fonctions énergétiques "Effet photoélectrique/diffusion Compton" (cf figure I.5). On parle dans le cas général de décomposition en base de fonctions (soit des matériaux de base soit des effets physiques).

Dans le domaine énergétique le plus courant (1-140 keV), certains matériaux présentent une raie K (cf figure I.21). Il s'agit d'une discontinuité du coefficient d'atténuation linéique due à une interaction des photons avec la première couche électronique de l'atome du matériau. Ainsi l'énergie à laquelle cette raie est observée dépend du matériau. Cette propriété est utilisée dans certains examens médicaux où les matériaux à raie K constituent des produits de contraste (en plus de leur

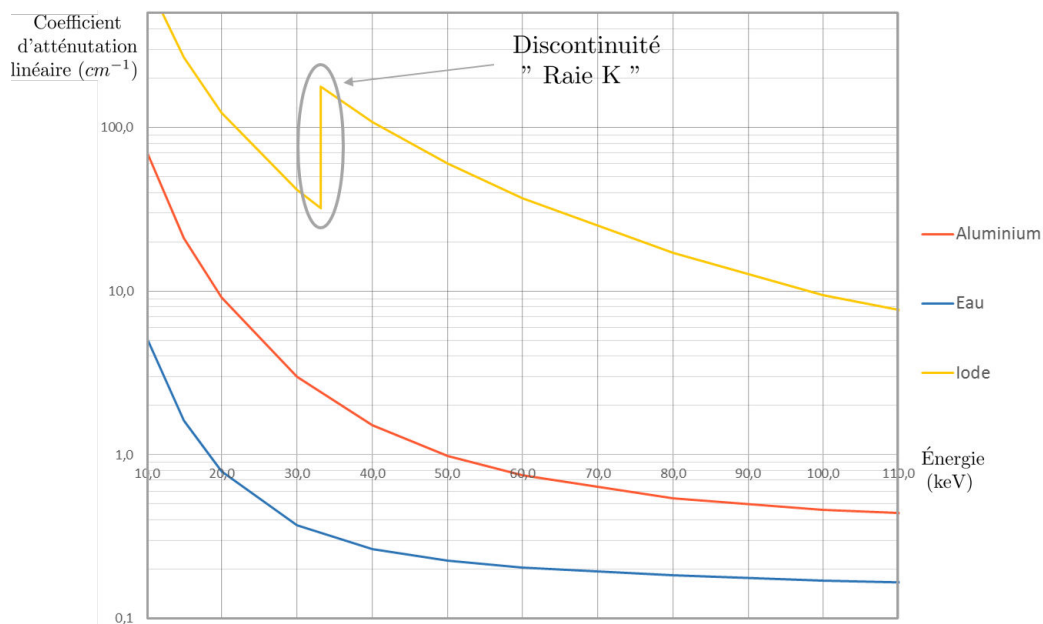


FIGURE I.21 – Coefficients d'atténuation linéiques de l'eau, l'aluminium et de l'iode (échelle logarithmique).

raie caractéristique, ils sont très atténuants). On peut citer par exemple dans le domaine énergétique 10-140 *keV* les matériaux suivants : l'iode (raie K autour de 33 *keV*), le gadolinium (raie K autour de 50 *keV*) ou l'or (raie K autour de 81 *keV*).

Dans le cas d'un matériau à raie K, la décomposition doit se faire avec trois fonctions pour prendre en compte la discontinuité. La troisième fonction doit comporter une discontinuité au niveau de l'énergie de la raie K :

$$\mu(E) = f_1\phi_1(E) + f_2\phi_2(E) + f_3\phi_3(E) \quad (\text{I.14})$$

où ϕ_3 comporte la discontinuité (cf figure I.21). Sauf mention contraire explicite et pour simplifier les notations, ce rapport se place dans le cas où deux fonctions de base suffisent pour la décomposition.

Dans le cas de la reconstruction tomographique, la décomposition en base de fonction permet de dissocier la dimension énergétique et spatiale du coefficient d'atténuation :

$$\mu(\underline{x}, E) = f_1(\underline{x})\phi_1(E) + f_2(\underline{x})\phi_2(E) \quad (\text{I.15})$$

où \underline{x} représente la position spatiale et E l'énergie.

Ainsi plutôt que de caractériser un volume par une carte de coefficient d'atténuation à plusieurs énergies différentes (au moins une dizaine pour décrire un coefficient d'atténuation dans le domaine énergétique 10-140 *keV*), on peut décrire un volume à l'aide de deux (ou trois) "images matériau de base" :

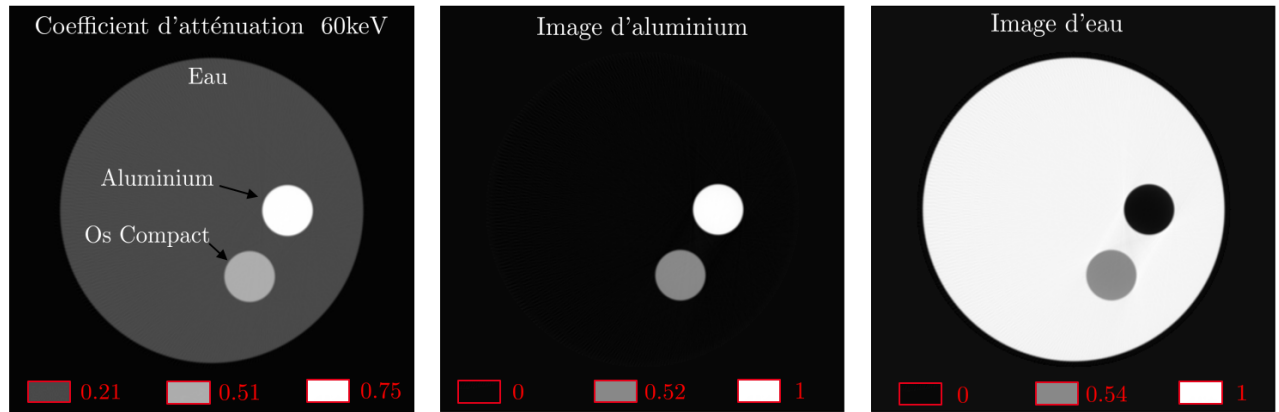


FIGURE I.22 – Décomposition en matériaux aluminium et eau d'un cylindre dont le fond est en eau avec deux inserts en aluminium et en os compact.

L'os compact se décompose en : $\mu_{os_C}(E) = 0.52 \times \mu_{alu}(E) + 0.54 \times \mu_{eau}(E)$.

On peut aussi considérer la décomposition en base de fonctions dans l'espace des sinogrammes (appelé aussi espace des projections). Par conséquence de la décomposition du volume, l'hypothèse d'Alvarez appliquée aux sinogrammes s'écrit :

$$[A\mu(E)]_i = [Af_1]_i\phi_1(E) + [Af_2]_i\phi_2(E) = l_{1i}\phi_1(E) + l_{2i}\phi_2(E) \quad (\text{I.16})$$

où $l_{1i} = [Af_1]_i$ et $l_{2i} = [Af_2]_i$ sont appelées longueurs en matériau de base. (N.B : On utilise dans ce rapport la notation pour un volume $\{f_j\}_{j \in [1;N_v]} : [Af]_i = \sum_{j=1}^{N_v} A_{ij}f_j$)

On parle alors de sinogramme en longueur de matériau (car l_{1i} et l_{2i} sont homogènes à des longueurs). Cette décomposition est illustrée sur la figure I.23. On y retrouve les dimensions de l'objet : cylindre d'eau de 30 *cm* de diamètre avec des inserts de diamètre 5 *cm* en aluminium et en os.

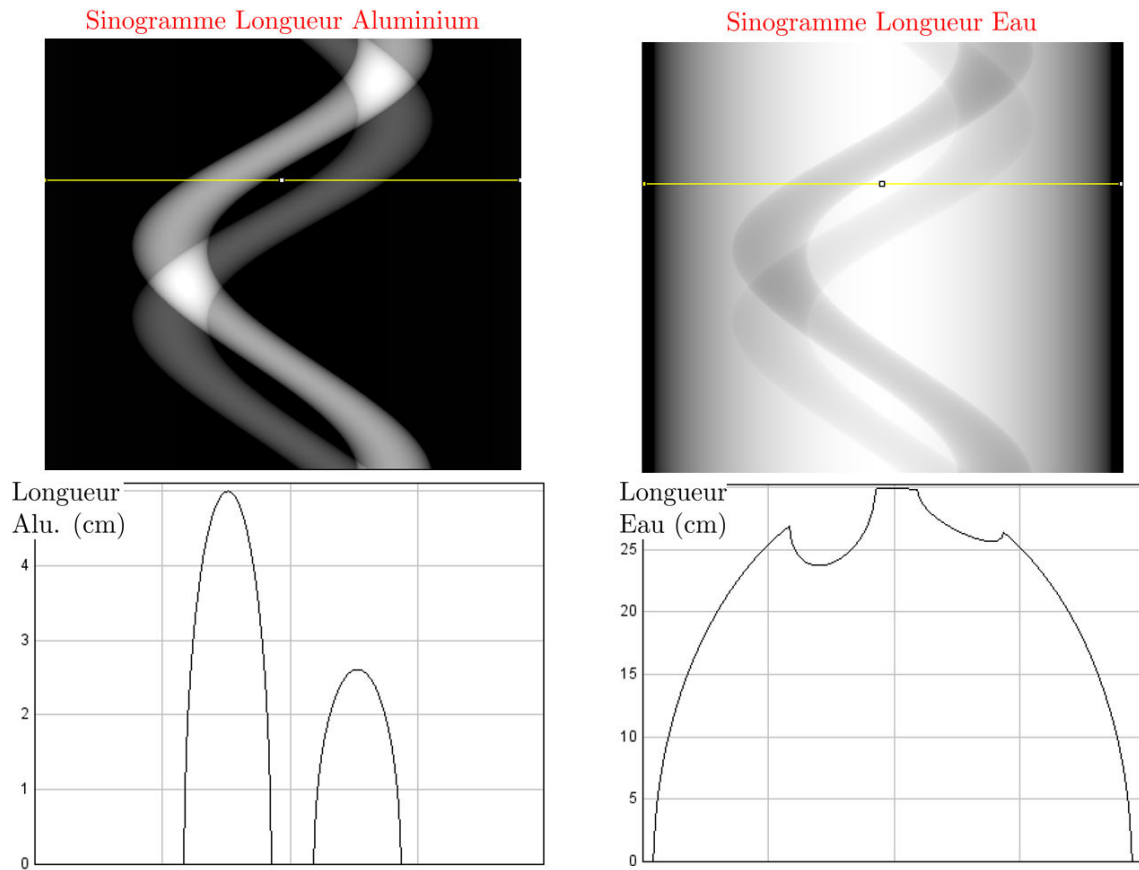


FIGURE I.23 – Sinogrammes en longueur aluminium et eau pour l'objet présenté dans la figure I.22.

I.6 Systèmes de mesure bi-énergie

Grâce à la décomposition en base de fonctions, il est possible de décrire la dépendance énergétique du spectre de photons atténués avec deux fonctions de base. C'est pourquoi des systèmes de mesure tomographique bi-énergie (système "DECT"; de l'anglais Dual-Energy Computed Tomography) commerciaux [11] ont été mis au point à partir de détecteurs à intégration. Le principe de la bi-énergie avec ces types de détecteurs est de réaliser une double acquisition avec un spectre basse-énergie (BE) et un spectre haute-énergie (HE) (cf figure I.24).

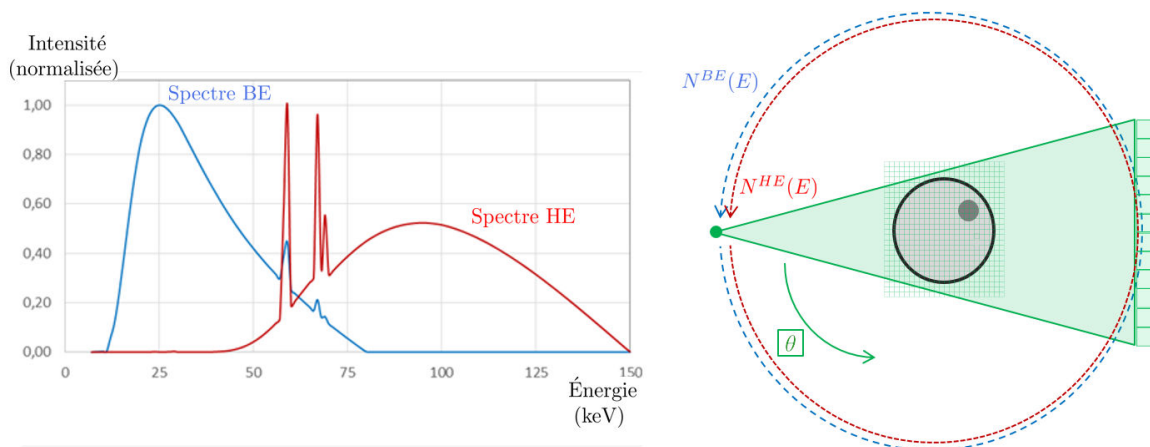


FIGURE I.24 – Illustration du principe de bi-acquisition : à chaque angle une double mesure est faite. A gauche : exemple de spectres BE (Tension 80 kV) et HE (Tension : 150 kV + filtration de 0.6 mm d'étain).

Ces spectres sont obtenus soit en changeant des paramètres de la source (tension, filtrage) soit avec un détecteur à deux couches appelé "Dual-Layer" (cf figure I.25). La technologie de Philips© "Dual-Layer" [12] permet en une acquisition de mesurer un spectre basse et haute énergie, la première couche du détecteur captant de préférence les photons de plus faible énergie et la seconde couche les photons ayant traversé la première couche. L'objectif d'un système *DECT* est de minimiser le chevauchement entre les deux spectres afin de permettre une meilleure discrimination énergétique.

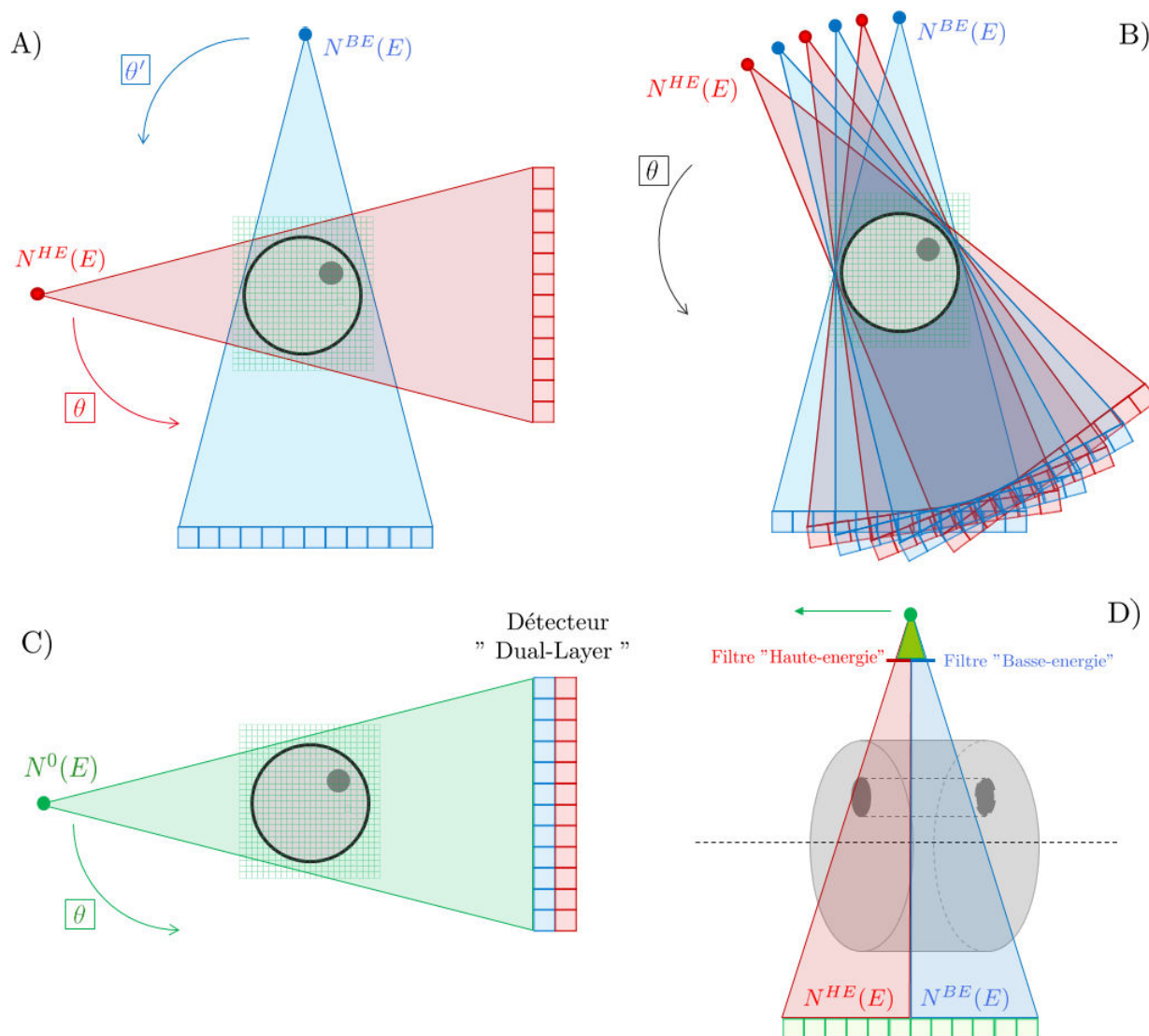


FIGURE I.25 – A) : Système avec deux sources (Système Siemens AG)
 B) : Source haute performance "Rapid kVp switching" (GE Healthcare)
 C) : Technologie détecteur "Dual-layer" (Philips Healthcare)
 D) : Source standard avec deux filtres en sortie "TwinBeam DECT" (Siemens AG)

Une manière de réaliser une acquisition bi-énergie avec un système de tomographie est de choisir deux niveaux de tension aux bornes de la source et de réaliser deux mesures à chaque angle de vue (cf figure I.24). D'autres possibilités ont été explorées par les fabricants en modifiant le système de mesure standard :

1. Deux sources angulairement espacées d'environ 90° (figure I.25 A)).
2. Source spécifique haute performance pouvant varier sa tension très rapidement entre deux angles de vues (figure I.25 B)).
3. Détecteur double couche, la première couche capte les photons aux plus basses énergies et la seconde les photons aux plus hautes énergies (figure I.25 C)).

4. Source standard mais utilisation de deux filtres accolés en sortie de la source pour créer deux spectres différents. L'objet d'étude est scanné en trois dimensions avec un chevauchement pour que chaque partie soit traversée par les deux spectres (figure I.25 D)).

Dans tous ces systèmes, on cherche à travailler avec la même dose qu'une acquisition tomographique standard alors que l'on se place dans le cas de deux acquisitions. Ainsi le bruit est plus conséquent dans les acquisitions bi-énergie. Les principales problématiques auxquelles font face ces systèmes sont le mouvement (cas d'un patient) et le rayonnement diffusé (dans le cas de plusieurs sources). L'avantage des détecteurs à base de semi-conducteur est d'obtenir en une seule acquisition une bonne séparation énergétique avec un générateur à rayons X standard.

I.7 Domaines d'application de la tomographie à rayons X

Il existe trois principaux domaines d'application de la tomographie à rayons X : le domaine médical, le contrôle non destructif pour l'industrie et le scanner de bagages pour la sûreté. Il s'agit de domaines avec des contraintes de mesure et des objectifs différents. De plus, les objets analysés possèdent des propriétés variées, connues ou non, qui peuvent être utilisées dans le processus d'analyse. Nous détaillons dans cette partie les particularités de chaque domaine.

Pour analyser un objet d'étude, on introduit la représentation dite " $f_1; f_2$ " : chaque voxel j de l'objet est représenté par un point de coordonnées $(f_{1j}; f_{2j})$ (cf figure I.26).

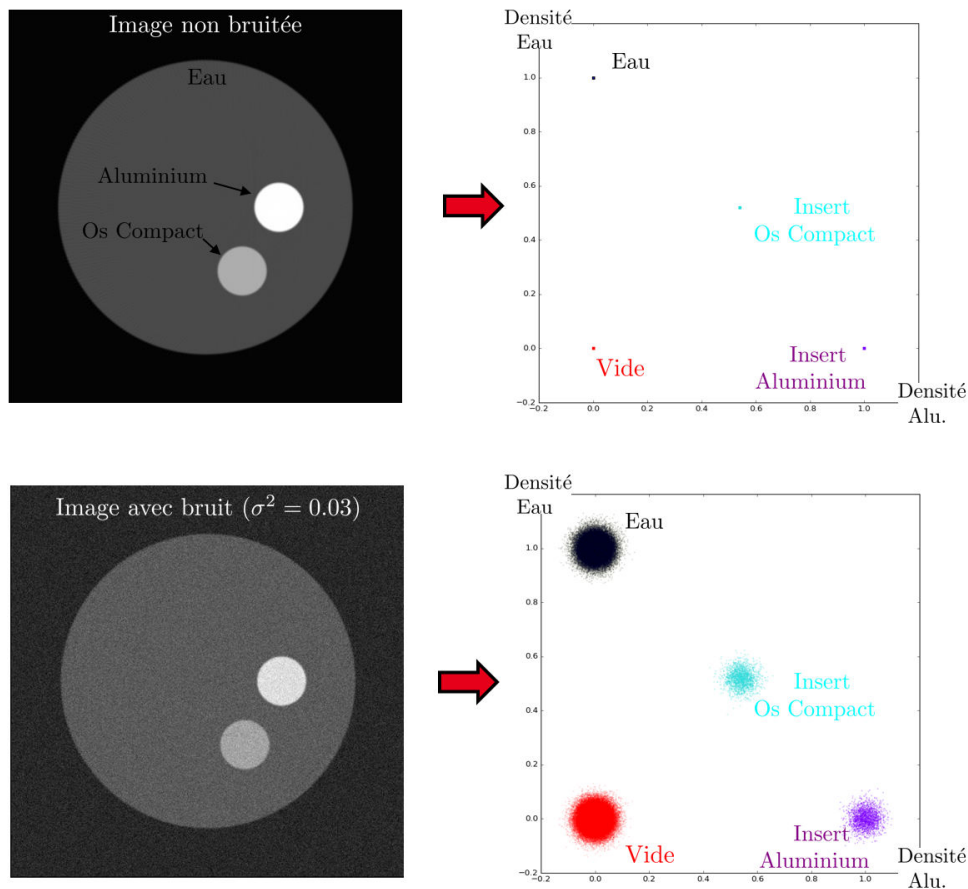


FIGURE I.26 – Représentation en carte $(f_1; f_2)$ avec et sans bruit.
Chaque point des graphiques à droite est un voxel de l'image à gauche.
(Rappel : $\mu_{os_C}(E) = 0.52 \times \mu_{alu}(E) + 0.54 \times \mu_{eau}(E)$)

I.7.1 Contrôle non destructif

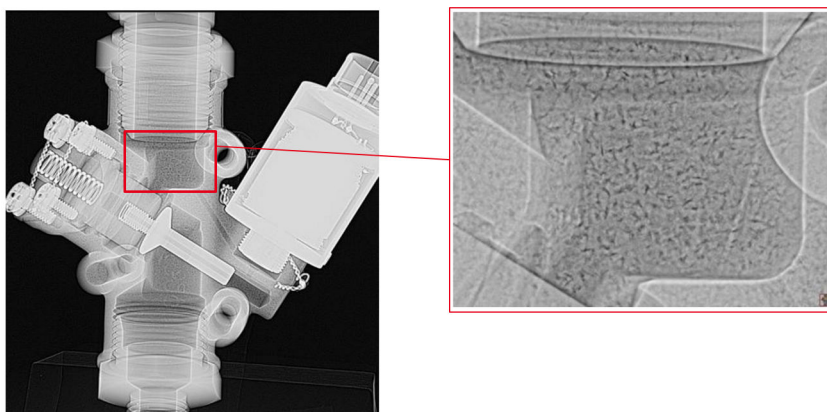


FIGURE I.27 – Un cas d'application de la tomographie à rayons X pour le contrôle non destructif : étude de la porosité d'une pièce produite par moulage en fonderie. (Source : Delphi Precision Imaging [13])

Dans le domaine de l'industrie, le contrôle non destructif (CND) est un procédé visant à scanner l'intérieur d'un objet produit. Il peut intervenir soit pendant la phase de développement produit soit au cours de la production (vérification de la conformité de l'objet) soit au cours de l'usage (contrôle de l'usure). Il s'agit d'objets à risque et/ou haute-performance [14] difficilement contrôlables par d'autres techniques. En production, la tomographie à rayons X est principalement utilisée pour des pièces moulées en fonderie mais avec l'avènement des matériaux composites avec résine elle suscite de plus en plus d'intérêt. L'objectif est la recherche de défauts au sein du matériau ; il peut s'agir d'un manque de matière à certains endroits ou la présence de corps étrangers.

Les avantages pratiques sont la fiabilité de la mesure par rapport à d'autres systèmes utilisés en CND. L'objet est immobile, ce qui permet une image nette et la comparaison avec un objet témoin (objet sans défaut ou modèle CAO-Conception Assistée par Ordinateur). Les inconvénients sont l'utilisation de rayons ionisants et l'encombrement d'un système de mesure tomographique. La durée du scanner varie en fonction du temps disponible et du type de matériau à inspecter. Nous montrons dans la figure I.27 un cas d'application de la tomographie à rayons X pour le CND où l'on cherche à étudier la porosité d'un objet produit.

La connaissance de l'image attendue est une donnée qui peut être utilisée dans le cas de la tomographie à rayons X spectrale. Même si la géométrie n'est pas connue (elle peut l'être partiellement selon le positionnement de l'objet connu ou non), on peut considérer connue la représentation $(f_1; f_2)$. Par exemple, dans le cas de la pièce de la figure I.28, les matériaux constituant les

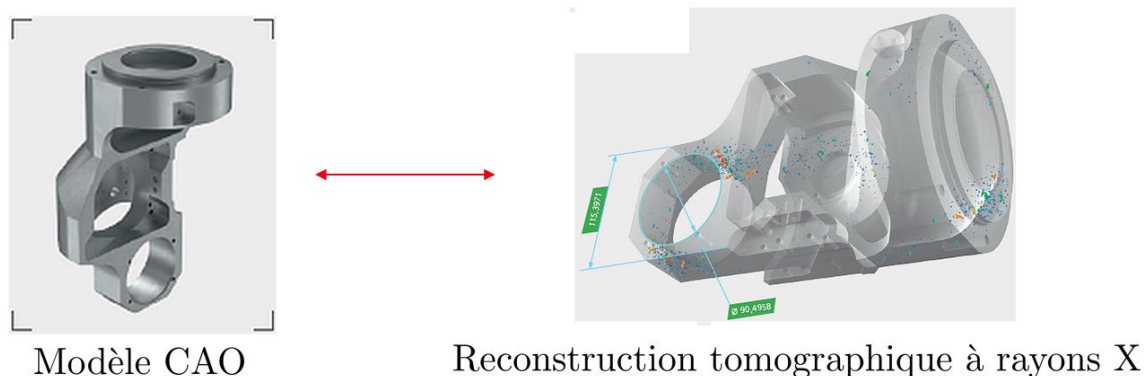


FIGURE I.28 – Exemple d'application de la tomographie à rayons X pour le contrôle non destructif : comparaison entre le modèle CAO et la reconstruction 3D de l'objet fabriqué. (Source : Actutem [15])

pièces sont connus. Les points aberrants dans la représentation $(f_1; f_2)$ représentent alors les porosités/défauts. La dose utilisée dans le cas du CND peut être beaucoup plus importante que pour le domaine médical. Cependant, le temps d'acquisition est souvent limité pour des raisons de vitesse de production. La difficulté peut être la différenciation de matériaux proches (comme les matériaux polymères ou composites) ou l'étude d'objets métalliques nécessitant une forte dose ou provoquant des artéfacts.

I.7.2 Diagnostic médical

La tomographie à rayons X est déjà largement utilisée dans le domaine médical [11]. Nous détaillerons dans le chapitre état de l'art les différentes approches qui ont été déjà développées et leurs limites. Comme dans le cas du CND, une certaine connaissance *a priori* des matériaux est possible. Cependant, à cause de la variabilité biologique d'un individu à l'autre, elle n'est pas aussi exacte. On peut cependant classer les matériaux du corps humain en plusieurs grandes familles : les tissus mous (matériaux doux), les os (matériau dur dont la densité peut varier), les poumons (matériaux avec de l'air) et les implants (prothèse...).

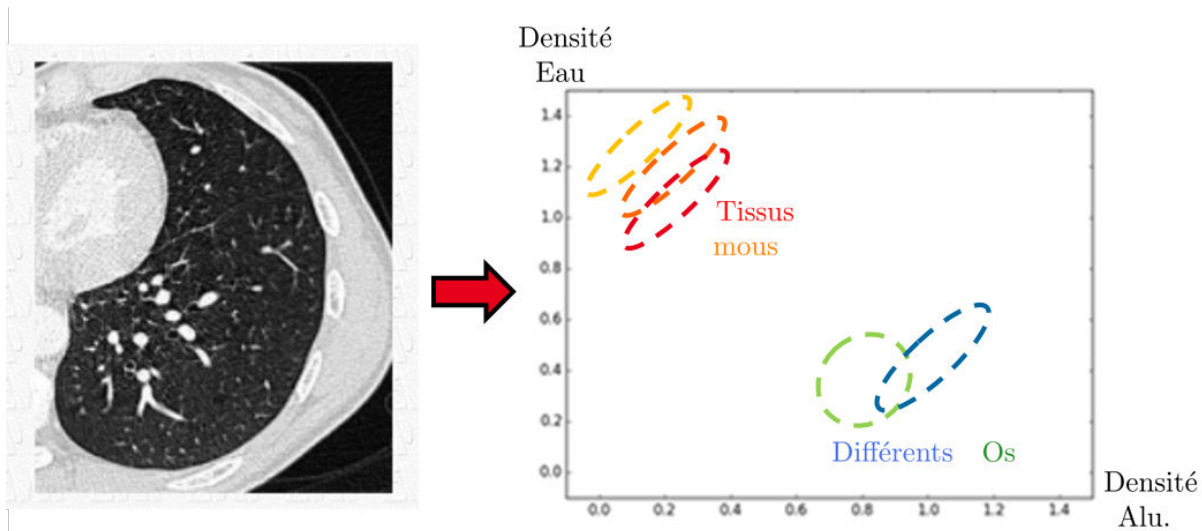


FIGURE I.29 – A gauche : Coupe du thorax au niveau des poumons.
A droite : Carte $(f_1 : f_2)$ schématisée (carte exacte inconnue)

Il est donc impossible de connaître la carte $(f_1 : f_2)$ et la variabilité biologique produit la même texture d'image que le bruit alors qu'elle constitue une vraie information. L'objectif de cet examen est d'obtenir une bonne image de l'intérieur du corps humain et dans une certaine mesure de pouvoir mesurer certaines densités osseuses ou d'étudier les tissus mous (analyse de tumeur).

Un facteur limitant est la dose absorbée par le patient. Celle-ci doit être totalement maîtrisée et la plus faible possible. Cette contrainte rentre en conflit direct avec le ratio signal-à-bruit. Le bruit est ainsi une vraie problématique et une variable d'optimisation dans le cadre médical.

Comme présenté dans la partie I.6, des systèmes *DECT* ont été commercialisés dans le cadre médical. Ils se révèlent en effet pertinent pour de plus en plus d'applications médicales [16]. Ils permettent notamment la reconstruction d'images mono-énergétique, une meilleure quantification des produits de contraste ou la caractérisation de lésions. Des premières études avec détecteurs à comptage montrent le fort potentiel de cette technologie pour le diagnostic médical grâce notamment à un nombre de canaux élevé [17]. Les images obtenues tendent à avoir un meilleur rapport contraste à bruit [18] [19] pour les produits de contraste.

I.7.3 Sécurité

Le contrôle de bagages par rayons X a longtemps été réalisé par une simple mesure radiographique. Avec l'augmentation des directives de sécurité depuis septembre 2014 [20], les nouvelles recommandations ont incité le contrôle par scanner à se développer. Aujourd'hui, il n'est pas encore systématique mais intervient en cas de doute suite à un contrôle radiographique. Certains scanners de bagages utilisent maintenant des systèmes bi-énergies afin d'étudier plus précisément les substances liquides.

L'utilisation de systèmes bi-énergie (*DECT*) ou spectraux est en effet très pertinente dans la détection de matières liquides dangereuses. Les matières dangereuses "communes" sont connues et caractérisées très précisément. Cependant la difficulté réside dans l'identification des matériaux au sein d'une image où se superposent de nombreux objets. En effet, à cause des artéfacts dans l'image, le couple $(\rho; \tau)$ (cf équation I.4) n'est pas obtenu avec assez de précision. Ceci empêche la discrimination entre matériaux. De plus les contrôles doivent aussi être en mesure de reconnaître des matières dangereuses inconnues sans connaissances *a priori* de l'objet. Une autre contrainte importante est la vitesse de défilement des bagages. Pour accélérer le procédé, une résolution plus faible que dans le cas d'analyse d'échantillons biologiques peut être utilisée.

Les scanners avec détecteurs à base de semi-conducteur commencent à être utilisés pour les contrôles aéroportuaires. Les premières études [21] montrent que là où les systèmes *DECT* rencontrent des difficultés (comme des contenants métalliques à numéro atomique élevé), l'utilisation de détecteurs à comptage de photons améliore l'analyse de substances liquides. Pour des raisons de sûreté, le fonctionnement des scanners utilisés dans la défense reste dans une certaine mesure confidentiel.

I.8 Conclusion du chapitre

Nous avons introduit dans ce premier chapitre les grands principes des rayons X : émission, atténuation à travers un objet et détection à travers deux types de détecteurs différents : les détecteurs à base de scintillateur et les détecteurs à base de matériaux semi-conducteurs. La difficulté de la reconstruction tomographique à rayons X est la prise en compte de l'aspect spectral. Dans les reconstructions qui se basent sur l'atténuation mesurée ($p_i = -\ln(\frac{m_i}{m_0})$), la dépendance énergétique du coefficient d'atténuation linéique $\mu(E)$ est négligée et ainsi des artéfacts apparaissent dans l'image (artéfact d'affaîssement ou d'ombrage).

La dépendance énergétique du coefficient d'atténuation peut être simplifiée en appliquant l'hypothèse d'Alvarez [10]. Celle-ci énonce que le coefficient d'atténuation d'un matériau peut être décomposée en une combinaison linéaire de deux matériaux dont la dépendance énergétique $\phi_1(E)$ et $\phi_2(E)$ est connue. L'application de cette décomposition a entraîné le développement de systèmes de mesure commerciaux bi-énergie ("DECT" : Dual Energy Computed Tomography). Ces appareils fonctionnent avec des détecteurs à base de scintillateur. L'avantage de l'utilisation des détecteurs à base de matériaux semi-conducteurs est de pouvoir mesurer plusieurs canaux énergétiques en une seule acquisition et d'obtenir une meilleure discrimination énergétique. Cependant les canaux de mesure de ces détecteurs présentent un chevauchement énergétique : une même énergie contribue à la mesure dans plusieurs canaux (phénomène de partage de charge et de fluorescence).

La tomographie à rayons X est appliquée couramment dans trois grands domaines : le contrôle non destructif dans l'industrie, le scanner pour le diagnostic médical et le contrôle de bagages pour la sécurité aéroportuaire. L'utilisation de détecteurs à base de matériaux semi-conducteurs peut permettre des améliorations dans ces trois grands domaines en terme de qualité d'image (réduction d'artéfacts et de niveau de bruit) et d'identification de matériaux présents (une quantification plus précise).

Le chapitre suivant introduit les différentes méthodes de reconstruction pour la tomographie à rayons X selon le type de données utilisées : données en atténuation p ou en nombre de photons m . Certaines méthodes utilisent la connaissance *a priori* (selon le domaine d'application) sur l'objet d'étude pour améliorer la reconstruction. Une fois l'état de l'art exposé, nous introduirons dans les chapitres suivants la méthode que nous avons choisie de développer. Celle-ci reconstruit directement le volume à partir de mesures vectorielles en nombres de photons issues de détecteurs à base de matériaux semi-conducteurs.

Chapitre II

Etat de l'art

Dans ce chapitre nous dressons un état de l'art des méthodes de reconstruction. Une première sous-partie s'intéresse aux reconstructions scalaires et une seconde aux reconstructions dites spectrales. Ces dernières s'appuient sur une application en parallèle de reconstructions scalaires ou l'adaptation d'algorithmes introduits pour une reconstruction scalaire. Nous proposons pour chacune des sous-parties une classification des approches.

II.1 Méthodes de reconstruction tomographique

Par opposition à l'utilisation de mesures sous forme d'un vecteur en chaque pixel et par convention, nous appellerons "reconstruction scalaire" les méthodes visant à obtenir un volume à partir d'un seul sinogramme (cf figure II.1). Ce sinogramme peut être soit une atténuation, soit un nombre de photons atténués obtenus à partir d'un détecteur à comptage soit un sinogramme en longueur de matériau obtenu par un traitement des mesures. Une reconstruction tomographique scalaire est définie à la fois par la formulation de son problème et l'algorithme utilisé pour la résolution de celui-ci.

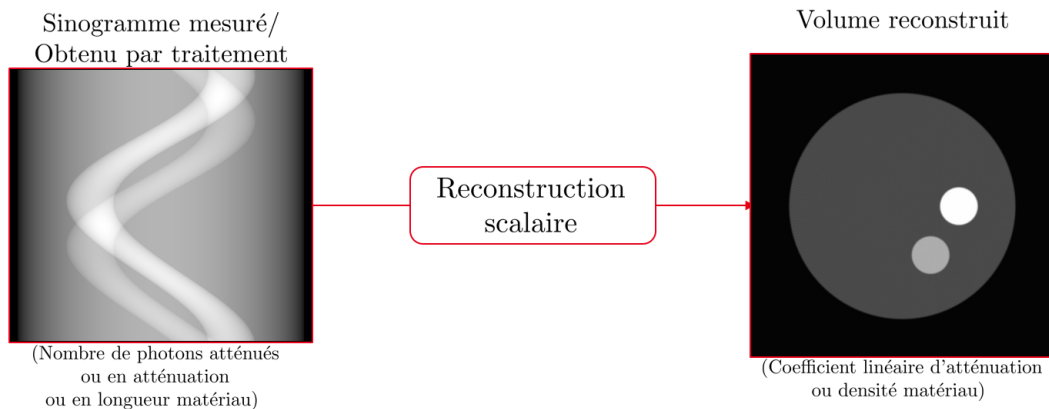


FIGURE II.1 – Schéma d'une reconstruction scalaire : "uni-dimensionnelle"
(au sens de la dimension en énergie)

Nous présentons dans les prochains paragraphes les différentes familles de méthodes de reconstruction scalaire, classifiées selon le schéma II.2.

II.1.1 Reconstruction analytique

Ce type de reconstruction a permis l'avènement du scanner dans le milieu médical et reste encore la référence en routine clinique. La donnée d'entrée est un sinogramme en atténuation $p = -\ln\left(\frac{m}{m^0}\right)$ (cf équation I.8), le plus souvent issu de la mesure par un détecteur à intégration avec normalisation par le plein flux m^0 . Une reconstruction analytique repose sur le théorème de la

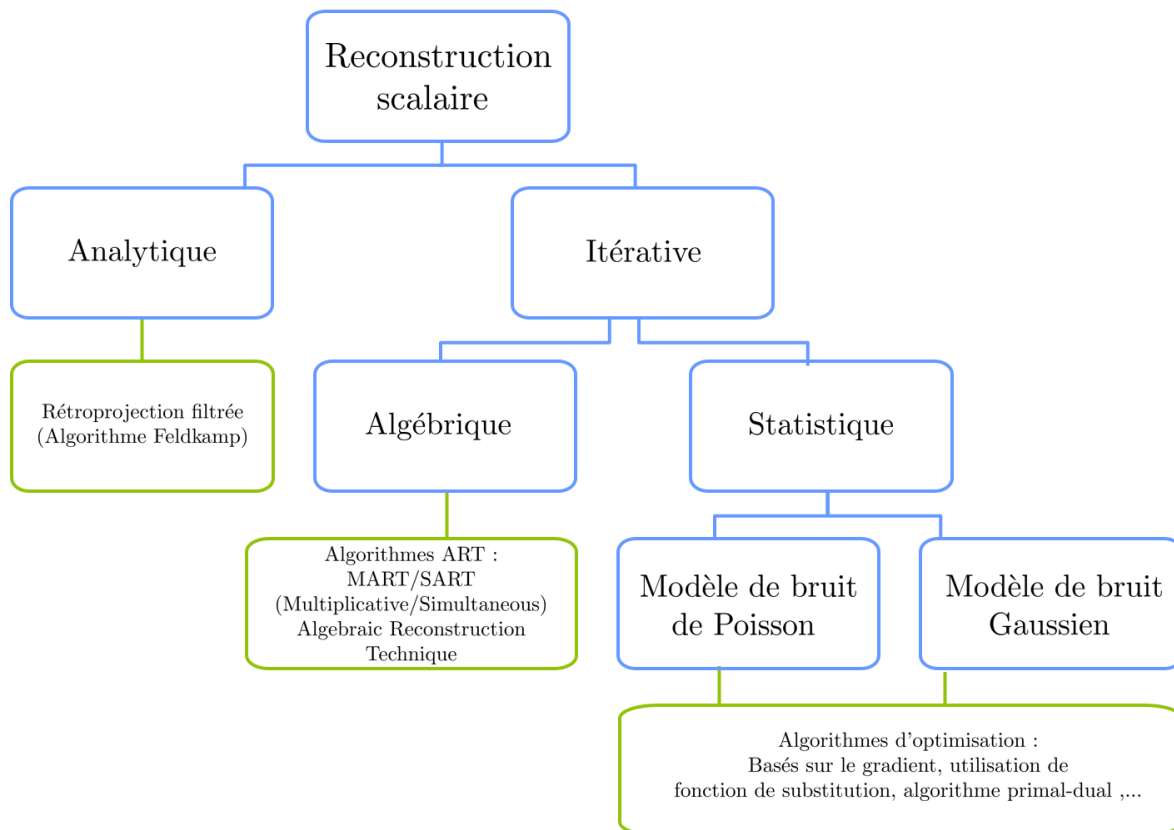
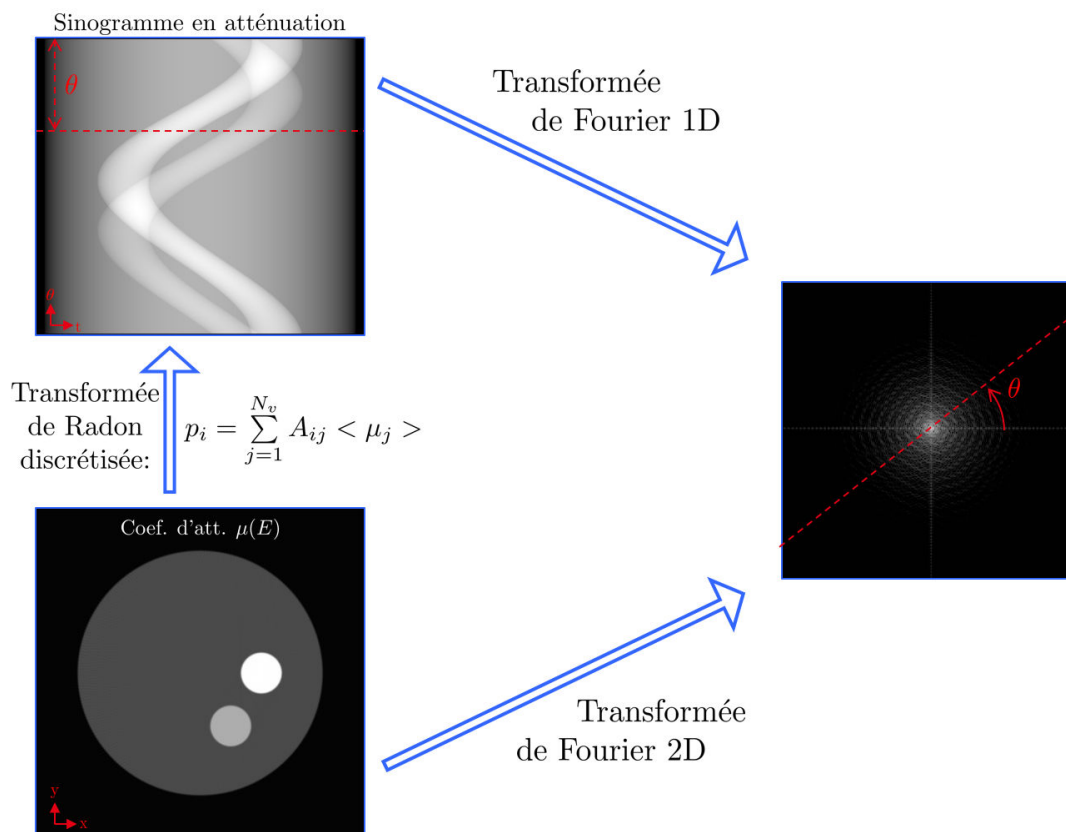


FIGURE II.2 – Classification des différentes reconstructions scalaires.

FIGURE II.3 – Illustration du théorème de coupe-projection.
(Vraie dans le cas d'un faisceau incident parallèle).

coupe centrale [22] (cf figure II.3). Celui-ci énonce que la transformée de Fourier 1D d'un angle de vue (une ligne du sinogramme) correspond dans le plan de Fourier du volume à une droite passant par l'origine et dont l'orientation dépend de la projection considérée :

$$TF_{2D} [< \mu >] = TF_{1D} [p] \quad (\text{II.1})$$

Par l'application du théorème de coupe-projection et le changement des coordonnées cartésiennes $(x; y)$ aux coordonnées polaires $(t; \theta)$ on peut montrer que :

$$\mu(x; y) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} p(\theta; t) h(t' - t) dt d\theta_{t'=x.\cos(\theta)+y.\sin(\theta)} \quad (\text{II.2})$$

où $TF_{1D}[h](w) = |w|$ est le filtre rampe. En pratique, pour appliquer cette expression, il faut deux étapes. La première est un filtrage des mesures par un filtre rampe dans l'espace de Fourier. La deuxième est une rétro-projection de ces projections filtrées :

$$\mu(x; y) = \int_{\theta=0}^{\pi} p_f(\theta; t) d\theta_{t'=x.\cos(\theta)+y.\sin(\theta)} \quad (\text{II.3})$$

où $p_f(\theta; t) = p(\theta; t) * h(t)$ (* marque le produit de convolution). A cause des problématiques de discrétisation et de bruit, ce filtre rampe est souvent combiné avec un autre filtre diminuant l'influence des hautes fréquences (filtre de Hanning, de Butterworth....). La combinaison du filtrage des mesures et de la rétro-projection est appelée "rétro-projection filtrée" (ou méthode FBP : Filtered Back Projection). L'adaptation de cette méthode au cas d'une géométrie conique en trois dimensions (faisceau incident non parallèle) est connue sous le nom d'algorithme de Feldkamp [23].

Une reconstruction analytique nécessite un bon conditionnement géométrique : chaque voxel doit être traversé à chaque angle de vue, le nombre d'angles de vue doit être conséquent, la taille des voxels dépend de la taille des pixels de mesure... Sous ces conditions, cette méthode présente de très bons résultats avec des temps de calculs acceptables en routine clinique. C'est pourquoi la rétroprojection filtrée est souvent utilisée comme référence. Cependant, comme évoqué à l'équation I.8, l'atténuation mesurée par un détecteur à intégration n'est pas exactement la transformée de Radon du volume à une énergie donnée. Cette approximation engendre des artéfacts dans les reconstructions comme les artéfacts métalliques ou d'affaîssement (cf sous-partie I.4).

En plus de la nécessité d'un bon conditionnement géométrique, une des limites de ce type de reconstruction concerne la robustesse au bruit. Le bruit des mesures peut être contenu par l'utilisation d'un filtre mais la méthode y reste sensible. De plus, la confiance dans chaque pixel de mesure augmente avec le nombre de photons mesurés dans celui-ci (le rapport signal à bruit d'une statistique photonique varie en $\sqrt{N_{mesure}}$). Elle dépend donc du nombre de photons mesurés. Mais la rétroprojection filtrée traite chaque donnée de la même manière. Le cadre théorique de cette méthode analytique reste assez rigide. Par opposition les méthodes itératives [24] se montrent plus souples et adaptables à d'autres formulations du problème de reconstruction.

II.1.2 Reconstruction itérative algébrique

Par opposition à une méthode analytique, une méthode itérative n'est pas définie par une formule analytique liant directement le volume reconstruit au sinogramme. Par contre, un modèle direct permet d'estimer la mesure à partir d'un volume donné. On appelle résidu le sinogramme qui est la différence entre cette estimation et la mesure réelle au pixel i :

$$r_i^n = \overline{m}_i^n - m_i \quad (\text{II.4})$$

avec \overline{m}_i^n la mesure estimée à partir du volume à l'itération n . L'inversion du modèle direct dans le cas de la tomographie pose problème car il n'existe pas de formulation analytique de celle-ci. Il est

plus simple de procéder par itérations : à partir d'un état initial (sous forme de volume), le résidu correspondant est calculé. Puis un schéma itératif ajuste le volume en fonction de ce résidu et ainsi de suite jusqu'à l'arrêt de l'algorithme par un critère d'arrêt :

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + f(\mu_j^n; r_i^n) \quad (\text{II.5})$$

où n est l'indice des itérations, r_i^n le résidu à l'itération n (cf éq. II.4) et f une fonction à définir.

Les techniques algébriques ART [22, 25] (Algebraic Reconstruction Techniques) sont l'expression la plus simple de ce procédé itératif. Ces techniques reconstruisent le volume à partir du sinogramme mesuré en atténuation p_i . On considère un rayon donné d'indice i (et son chemin l_i) parmi les N_p pixels de mesure. Le volume projeté en ce pixel est $\bar{p}_i^n = [A\mu^n]_i$ et le résidu $r_i^n = p_i - \bar{p}_i^n$. La valeur de ce résidu est ensuite répartie entre les voxels présents sur le chemin de ce rayon. La valeur du volume est ainsi modifiée après chaque prise en compte d'un rayon. Une itération est complète lorsque tous les rayons ont été pris en compte. Ainsi au cours d'une itération, il y a autant de solutions intermédiaires $\mu_j^{n+\frac{x}{N_p}}$ ($\forall x \in [0, N_p - 1]$) que de pixels. L'algorithme ART donne le schéma itératif suivant pour un voxel j et un rayon i donné, et la sous-itération x de l'itération n :

$$\mu_j^{n+\frac{x+1}{N_p}} = \mu_j^{n+\frac{x}{N_p}} + \frac{A_{ij}r_i}{\sum_{\xi=1}^{N_v} A_{i\xi}^2} \quad (\text{II.6})$$

où A est la matrice de projection (cf figure I.9), N_p et N_v respectivement le nombre de pixels et voxels et $x \in [0; N_p - 1]$. La méthode ART obtient de très bons résultats après quelques itérations. Néanmoins elle est très coûteuse en calcul. En effet, dans le cas où la matrice de projection n'est pas stockée, le volume est projeté à chaque mise à jour (donc à chaque pixel traité) pour calculer le résidu et cette opération est très lourde (A est très grande). C'est pourquoi certaines variantes ont été développées [26].

Le principe de ces variantes est qu'un rayon ne traverse qu'une petite fraction du volume entier. Ainsi il est possible de traiter plusieurs rayons en une mise à jour et d'économiser plusieurs opérations de projection. Ce processus s'appelle SART (*Simultaneous Algebraic Reconstruction Techniques*). Le choix du regroupement et l'ordre du traitement des pixels en sous-groupe ou "ordered subsets" a une forte influence. C'est un compromis entre nombre d'itérations et temps de calcul [27]. La convergence du SART a été démontrée [28] et fait intervenir un paramètre de relaxation λ et un nombre de subsets N_s (indice de mise à jour : $k \in [0; N_s - 1]$) :

$$\mu_j^{n+\frac{k+1}{N_s}} = \mu_j^{n+\frac{k}{N_s}} + \lambda \frac{1}{\sum_{s \in \mathcal{S}_k} A_{sj}} \sum_{s \in \mathcal{S}_k} \frac{A_{sj}r_s}{\sum_{\xi=1}^{N_v} A_{i\xi}} \quad (\text{II.7})$$

où \mathcal{S}_k est le k^e sous-groupe de pixels. (L'équation II.6 est donc un cas particulier de II.7 où $N_s = N_p$).

D'autres versions de cette méthode algébrique existent avec un schéma multiplicatif : MART (*Multiplicative ART*) ou encore une version où tous les pixels sont pris en compte au cours d'une mise à jour : SIRT (*Simultaneous Iterative Reconstruction Technique*).

La version qui montre le meilleur compromis entre qualité d'image et temps de calcul est la version SART avec des sous-groupes de pixels choisis judicieusement [29, 30]. Cependant, cette méthode ne comprend pas non plus de modèle de bruit et rencontre les mêmes problèmes que les méthodes analytiques (reconstruction d'un $\langle \mu_j \rangle$ moyen, cf équation I.8). Par contre, elle est pertinente dans le cas de tomographie avec un faible nombre de vues où elle apporte de meilleurs résultats que les méthodes analytiques.

Bien qu'il ne soit pas formulé ainsi, il est montré que l'algorithme SART converge vers la même solution μ^* qu'un problème aux moindres carrés simple (si celui-ci admet une unique solution) :

$$\mu^* = \arg \left\{ \min_{\mu} \left[\|p - A\mu\|_2 \right] \right\} \quad (\text{II.8})$$

avec $\|\cdot\|_2$ la norme L^2 . Ce problème peut être interprété comme un problème statistique simple. Nous décrivons dans la prochaine partie des modèles statistiques plus complexes.

II.1.3 Reconstruction itérative statistique

Le premier algorithme de reconstruction statistique appliqué à la tomographie de transmission fût une adaptation du *ML-EM* (*Maximum Likelihood - Expectation Maximisation*) utilisé en tomographie d'émission [2]. Depuis, de nombreuses méthodes ont été développées. Il est difficile de pouvoir faire une liste exhaustive de toutes ces méthodes. Néanmoins nous présentons dans ce chapitre les principaux points communs et différences entre ces méthodes.

Chaque méthode statistique est définie par [31] :

1. Une paramétrisation de l'objet (un modèle objet)
2. Un modèle direct
3. Un modèle statistique (modèle de bruit de la mesure)
4. Des termes de régularisation/contraintes (optionnel)
5. Un algorithme d'optimisation

Nous détaillons chacune de ces catégories dans la suite de cette sous-partie.

II.1.3.1 La paramétrisation de l'objet

L'objet d'étude est caractérisé par un coefficient d'atténuation linéique qui est continu spatialement. En pratique, le problème est discrétisé. Les pixels sont considérés comme des points de mesures ponctuels. Pour décrire spatialement le volume, la manière la plus simple est l'utilisation de voxels. Cela permet de linéariser le calcul de la transformée de Radon avec la matrice système A . Il existe néanmoins d'autres modèles qui utilisent d'autres fonctions spatiales que les indicatrices voxels. Le cas général s'écrit :

$$\mu(\underline{x}, E) = \sum_{j=1}^{N_v} \mu_j(E) b_j(\underline{x}) \quad (\text{II.9})$$

avec \underline{x} la position spatiale. Dans le cas d'indicatrices voxels, $b_j(\underline{x})$ vaut 1 ou 0. Il est aussi possible d'utiliser des fonctions spatiales continues comme les "blobs" [32], des "B-plines" ou des ondelettes [33, 34]. Mais le modèle à base d'indicatrices voxels reste prépondérant dans la littérature.

II.1.3.2 Le modèle direct

Le modèle direct théorique est la relation qui permet d'obtenir la mesure (ou l'atténuation) à partir d'un volume donné (volume à une certaine itération) :

$$\overline{m}_i^n = f\left(\mu^n\right) \quad (\text{II.10})$$

où f est une fonction à définir et caractérise le modèle direct.

Dans les reconstructions analytiques et algébriques, le modèle direct est simplement la transformée de Radon. Dans certaines méthodes statistiques, il décrit plus précisément la mesure et on s'intéresse aux nombres de photons \bar{m}_i ou aux nombres de photons normalisés $\frac{\bar{m}_i}{m^0}$ avec m^0 la mesure de plein flux. Le modèle prend en entrée la valeur du spectre incident $N^0(E)$, la géométrie du problème (la matrice A) et un modèle détecteur $Df^c(N^{att}(E))$: Detector function définie par canal c . Par exemple, dans le cas des détecteurs à détection directe et si la réponse est linéaire, on a :

$$Df^c(N^{att}(E)) = DRM(c; E)N^{att}(E) \quad (\text{II.11})$$

Le modèle direct s'écrit de manière explicite (en combinant les notations introduites dans les équations I.2, I.5 et I.6 ou I.12 et en discrétisant sur les énergies E) :

Détecteur en intégration :	Détecteur à comptage dans un canal c :
$\bar{m}_i(\mu) = \sum_{E=1}^{N_E} D(E)N^0(E)e^{-[A\mu(E)]_i} \quad (\text{II.12})$	$\bar{m}_i^c(\mu) = \sum_{E=1}^{N_E} Df^c(N^0(E)e^{-[A\mu(E)]_i}) \quad (\text{II.13})$

Le modèle direct est souvent normalisé par la mesure sans objet :

Détecteur en intégration :	Détecteur à comptage dans un canal c :
$\bar{m}_i(\mu) = \sum_{E=1}^{N_E} B(E)e^{-[A\mu(E)]_i} \quad (\text{II.14})$ $B(E) = \frac{D(E)N^0(E)}{\sum_{E=1}^{N_E} D(E)N^0(E)}$	$\bar{m}_i^c(\mu) = \sum_{E=1}^{N_E} Df^c(Y(E)e^{-[A\mu(E)]_i}) \quad (\text{II.15})$ $Y(E) = \frac{N^0(E)}{\sum_{E=1}^{N_E} Df^c(N^0(E))}$

II.1.3.3 Le modèle statistique

Les reconstructions statistiques visent à trouver le volume le plus probable connaissant les mesures, c'est-à-dire à maximiser la probabilité $P(\text{volume}|\text{mesure})$ qui peut s'écrire en notations $P(\mu|m)$. Pour calculer cette probabilité la loi de Bayes est utilisée :

$$P(\text{volume}|\text{mesure}) = \frac{P(\text{mesure}|\text{volume})P(\text{volume})}{P(\text{mesure})} \quad (\text{II.16})$$

La probabilité $P(\text{mesure})$ peut être considérée constante (i.e. n'intervenant pas dans la maximisation de $P(\text{volume}|\text{mesure})$). Le terme $P(\text{mesure}|\text{volume})$ est appelé la vraisemblance du modèle et $P(\text{volume})$ l'a priori, qui traduit certaines propriétés de l'objet reconstruit connues indépendamment de la reconstruction (ex : propriétés physiques).

L'objectif est de maximiser le critère *a posteriori* du modèle $P(\text{mesure}|\text{volume})$ ou de manière équivalente maximiser le logarithme :

$$\Phi(m; \mu) = \log \left[P(\text{volume}|\text{mesure}) \right] = \log \left[P(\text{mesure}|\text{volume}) \right] + \log \left[P(\text{volume}) \right] \quad (\text{II.17})$$

où $\Phi(m; \mu)$ est le critère *a posteriori* du modèle et $\log \left[P(\text{mesure}|\text{volume}) \right]$ la log-vraisemblance du modèle.

Pour définir le terme de vraisemblance $P(mesure|volume)$, il faut choisir la loi statistique suivie par les mesures. Le bruit photonique (émission de photons et atténuation) est de type poissonien mais il est combiné avec le bruit électronique lors de la détection. Les modèles de bruit les plus adaptés dans le cas de faible nombre de photons sont les modèles de Poisson composé [35] ou de mélange de bruit de Poisson et de bruit Gaussien [36]. Néanmoins dans le cas standard en examen médical clinique un simple modèle de Poisson ou Gaussien est valable [37,38]. Un bruit poissonien se révèle plus précis lorsque le nombre de photons est faible mais un bruit gaussien donne un terme de vraisemblance plus facilement maximisable car quadratique.

En chaque pixel de mesure on fixe une loi de probabilité selon le modèle choisi :

Modèle Poissonnien [1] :	Modèle Gaussien [39] :
$m_i \sim Poisson\left(\overline{m}_i(\mu)\right)$ (II.18)	$m_i \sim \mathcal{N}\left(\overline{m}_i(\mu); \sigma_i^2\right)$ (II.19)

TABLE II.1 – Les deux principaux modèles de bruit étudiés dans la littérature.
 σ_i^2 est la variance définie dans le cas du bruit gaussien.

La log-vraisemblance $L_i(m; \mu)$ associée à chaque modèle s'écrit :

Modèle Poissonnien [1] :	Modèle Gaussien [39] :
$L_i(m; \mu) = m_i \log(\overline{m}_i(\mu)) - \overline{m}_i(\mu) + Cte$ (II.20)	$L_i(m; \mu) = \frac{-1}{2\sigma_i^2}(\overline{m}_i - m_i)^2 + Cte$ (II.21)

TABLE II.2 – Log-vraisemblances issues des modèles de bruit poissonnien et gaussien.
 Cte : terme qui ne dépend pas de μ : il n'intervient pas dans la maximisation.

La vraisemblance poissonnienne par pixel, bien que convexe, reste plus complexe à maximiser. Souvent, les auteurs l'approximent par son expansion à l'ordre 2 en série de Taylor (développement à l'ordre 2 tel que $\overline{m}_i(\mu) = m_i + \epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$) [1] :

$$L_i(m_i; \mu) = m_i \log(\overline{m}_i(\mu)) - \overline{m}_i(\mu) \approx m_i \log(m_i) - m_i - \frac{1}{2m_i}(\overline{m}_i(\mu) - m_i)^2 \quad (II.22)$$

Les deux premiers termes $m_i \log(m_i)$ et m_i sont supposés constants et le dernier terme est équivalent au modèle gaussien avec une variance $\sigma_i^2 = \sqrt{m_i}$.

Les mesures à chaque pixel sont supposées indépendantes, ainsi le terme d'attache aux données (la log-vraisemblance) $L(m; \mu)$ s'écrit :

$$L(m; \mu) = \sum_{i=1}^{N_p} L_i(m_i; \mu) \quad (II.23)$$

où $L_i(m_i; \mu)$ est la log-vraisemblance (poissonnienne ou gaussienne) définie par pixel. Et le problème à résoudre s'écrit, connaissant m :

$$\mu^* = \arg \left\{ \max_{\mu} \left[L(m; \mu) \right] \right\} \quad (II.24)$$

II.1.3.4 Les termes de régularisation/contraintes

Le terme d'*a priori* $\log[P(\text{volume})]$ est un terme qui n'est pas toujours implémenté, il peut être pris nul. Dans le cas où il est pris à zéro, le critère s'appelle estimateur du maximum de vraisemblance (critère ML : *Maximisation Likelihood*). Dans le cas où un terme de régularisation est défini, le critère devient l'estimateur du maximum *a posteriori* (critère MAP : *Maximisation A Posteriori*).

Dans le cadre d'une reconstruction scalaire, les termes d'*a priori* sont de type régularisation spatiale ou représentation parcimonieuse [40] (utilisation de la norme l_1 [41] et d'un modèle objet plus complexe [42]). La représentation parcimonieuse a été introduite dans le cas de problèmes de dé-bruitage d'images et est moins courante en reconstruction tomographique. L'*a priori* sert à maîtriser le bruit dans la reconstruction et la sensibilité du résultat à la discrétisation du volume. Dans les reconstructions spectrales (partie suivante), nous présenterons d'autres types de régularisation.

Dans le cadre d'une régularisation spatiale, on cherche lors de la mise à jour d'un voxel à prendre en compte la valeur de ses voisins. Le théorème d'Hammersley-Clifford établit le lien entre une probabilité globale $P(\mu)$ et les probabilités locales $P(\mu_j|\mu_\xi, \xi \in \mathcal{V}_j)$ où \mathcal{V}_j est le voisinage de j . Dans un cadre statistique, si on interprète μ comme un champ aléatoire défini en chaque pixel j et le système de voisinage \mathcal{V} alors μ est un champ de Markov avec la probabilité $P(\mu)$ donnée par une distribution de Gibbs (cf II.25).

Le terme de pénalisation s'écrit :

$$P(\mu) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \sum_{j=1}^{N_v} V_j(\mu)} \quad (\text{II.25})$$

où Z est un paramètre de normalisation, β le poids de la régularisation et V_j est une fonction de potentiel associée à la probabilité définie localement $P(\mu_j|\mu_\xi, \xi \in \mathcal{V}_j)$. Les termes V_j tendent à pénaliser la différence entre pixels. Ils s'expriment à partir de la différence de valeur entre pixels voisins : $V_j(\mu) = \sum_{\xi=1}^{N_v} w_{j\xi} v_j(\Delta_{j\xi})$ où $w_{j\xi}$ est le poids attribué à chaque voisin (très souvent pris inverse à la distance euclidienne), v_j une fonction à définir et $\Delta_{j\xi} = \mu_j - \mu_\xi$ la différence de valeur entre les deux voxels j et ξ . On étudie le logarithme de cette probabilité à une constante près :

$$\log[P(\mu)] = -\beta \sum_{j=1}^{N_v} V_j(\mu) = -\beta \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{\xi=1}^{N_v} w_{j\xi} v_j(\Delta_{j\xi}) \quad (\text{II.26})$$

Avec l'ajout d'un terme de régularisation, le problème devient donc la maximisation du critère *a posteriori* :

$$\mu^* = \arg \left\{ \max_{\mu} [\Phi(m; \mu)] \right\} = \arg \left\{ \max_{\mu} [L(m; \mu) - \beta R(\mu)] \right\} \quad (\text{II.27})$$

avec $R(\mu) = \sum_{j=1}^{N_v} V_j(\mu)$ et $\Phi(m; \mu)$ est aussi appelée la fonction de coût.

Un point différenciant entre les méthodes de reconstruction est la valeur que prend la fonction v_j . Le tableau II.3 recense quelques exemples couramment utilisés pour définir v_j avec leurs avantages et leurs inconvénients. Ces fonctions dépendent de la différence $\Delta_{j\xi}$. La figure II.4 compare la forme de ces fonctions selon la valeur de $\Delta_{j\xi}$. Les points importants de ces fonctions sont la convexité de celles-ci et/ou la pénalisation des grandes différences entre voxels (qui sont physiques si supérieures au seuil de bruit). Le compromis entre ces deux propriétés est appelé "edge-preserving". Des conditions sur v_j pour respecter la propriété de "edge-preserving" ont été démontrées [43].

Nom/Auteur :	$v_j(\Delta_{j\xi})$ avec $\Delta_{j\xi} = \mu_j - \mu_\xi$	Avantages et inconvénients :
Quadratique simple [44]	$\frac{t^2}{2}$	+ : Fonction quadratique (donc convexe) - : Pénalise énormément les grandes différences
Huber [45] [46]	$\begin{cases} \frac{t^2}{2\delta_h^2} & \text{si } t < \delta_h \\ \frac{ t - \delta_h/2}{\delta_h} & \text{sinon} \end{cases}$	+ : Fonction convexe, dérivée constante au-delà du seuil σ_h - : Pénalise aussi les grandes différences, dérivée seconde non continue
Long & Fessler, 2014 [47]	$\frac{\delta_f^2}{3} \left(\sqrt{1 + 3 \left(\frac{t}{\delta_f} \right)^2} - 1 \right)$	+ : Fonction convexe, dérivée tend vers une constante, continûment deux fois dérivable - : Pénalise les grandes différences
Quadratique tronquée [48]	$\begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{si } t < \delta_q \\ \frac{\delta_q^2}{2} & \text{sinon} \end{cases}$	+ : Ne pénalise pas les grandes différences (seuil réglable) - : Fonction non convexe, non continûment dérivable
Tukey [49] [50]	$\begin{cases} 1 - \left(1 - \left(\frac{t}{\delta_t} \right)^2 \right)^3 & \text{si } t < \delta_t \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$	+ : Ne pénalise pas les grandes différences (seuil réglable), continûment deux fois dérivable - : Fonction non convexe

TABLE II.3 – Comparaison des principales fonctions de potentiel utilisées dans la littérature.
 $\Delta_{j\xi} = \mu_j - \mu_\xi$ représente la différence entre la valeur de deux voxels j et ξ .

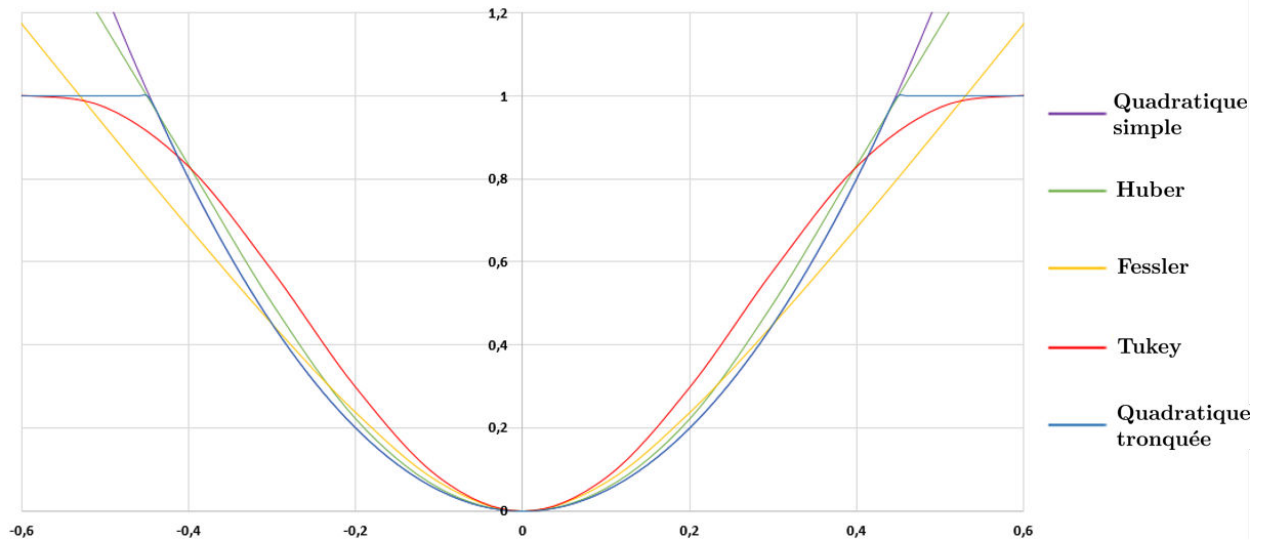


FIGURE II.4 – Comparaison des fonctions de potentiel utilisées dans les distributions de Gibbs (cf éq. II.25). Les paramètres β et δ de ces fonctions sont fixés pour que les fonctions soient comparables (cf Table II.3).

Un terme de régularisation beaucoup utilisé dans la littérature est la norme TV (Total Variation [51]) qui est la norme L^1 du gradient sur toute l'image. Elle traduit le fait qu'il est plus probable que le volume reconstruit soit régulier. Elle possède l'avantage d'être sensible aux discontinuités même si elle tend à faire disparaître les textures plus fines [52]. Elle se montre très pertinente dans le cas d'une reconstruction tomographique avec peu d'angles de vue [53]. De plus, il s'agit d'un terme qui est convexe. Mais il présente des inconvénients par rapport à d'autres termes : non linéaire, non quadratique et non continûment dérivable.

Dans une image 2D, on décompose l'indice de voxel selon ses coordonnées dans les deux dimensions $(x, y) : j = N_x \times y + x$ où N_x est le nombre de voxels sur une ligne. Alors la norme TV s'écrit :

$$TV(\mu) = \|\nabla \mu\|_1 = \sum_{x=1}^{N_x-1} \sum_{y=1}^{N_y-1} |\mu_{x+1,y} - \mu_{x,y}| + |\mu_{x,y+1} - \mu_{x,y}| \quad (\text{II.28})$$

Il est possible d'interpréter cette norme comme un terme *a priori* $P(\text{volume})$, qui pénalise les volumes bruités.

Une autre façon de régulariser le volume reconstruit spatialement est l'utilisation des filtres de lissage au cours des itérations. Ils sont principalement non linéaires (*Bilateral Filter* [54], *Gaussian Filter* [55], *Non Local Mean filter* [54]). Ils sont appliqués entre chaque itération lors de la reconstruction. Dans le cas où ils sont implémentés au cours de la projection de volume, on peut parler de régularisation de type "tamis" (*Sieve Regularization* [55]) : on s'affranchit des petites variations de volume causées par exemple par une taille de voxel mal adaptée (celle-ci étant toujours le fruit d'un compromis). De plus, la précision et la résolution spatiale des détecteurs sont limitées et ce type de régularisation permet de traduire ces aspects physiques.

II.1.3.5 L'algorithme d'optimisation

Les reconstructions statistiques se basent donc sur l'optimisation (maximisation ou minimisation) d'une fonction de coût Φ (avec ou sans terme de régularisation) :

$$\mu^* = \arg \left\{ \min_{\mu} / \max_{\mu} [\Phi(m; \mu)] \right\} \quad (\text{II.29})$$

Le résultat obtenu et son unicité varie selon la fonction de coût définie. Le choix de l'algorithme d'optimisation dépend des propriétés de la fonction de coût (quadratique, convexe, différentiable...).

Pour une fonction de coût convexe avec un unique extremum, le résultat à convergence ne dépend pas en théorie de l'algorithme choisi. Cependant, à cause de la taille de la géométrie du problème et des contraintes de temps, le résultat est parfois arrêté avant convergence totale de l'algorithme. Donc l'algorithme utilisé peut influencer le résultat final de la reconstruction.

Si la fonction de coût n'admet pas un unique extremum (ex : terme de régularisation non convexe, ...), il faut recourir à des algorithmes plus complexes. Une possibilité complémentaire est d'initialiser la reconstruction avec un résultat déjà proche de la solution et convenir que l'on converge vers une solution acceptable [39]. Dans ce dernier cas, le résultat dépend de l'état initial. Celui-ci joue donc un rôle important et peut être interprété comme un *a priori* fort sur le volume (au même titre qu'un terme de régularisation).

Mode de mise à jour et de prise en compte des données : Un facteur qui joue sur la vitesse de reconstruction est l'implémentation et l'optimisation de celle-ci. Plus précisément, la façon de modifier au cours des itérations le volume en fonction des mesures va influencer la vitesse de convergence. Un algorithme statistique est caractérisé par son schéma itératif que l'on peut généraliser dans beaucoup de cas par une écriture en chaque voxel :

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \sum_{i=1}^{N_p} f_i(\mu_j^n, m_i) \quad (\text{II.30})$$

où N_p est le nombre de pixels de mesure et f_i une fonction à définir qui ne dépend que d'un pixel.

Dans le cas des reconstructions algébriques, le cas de base (ART) traite les pixels un à un (un pixel pris en compte par mise à jour). Dans le cas statistique, le cas de base est la prise en compte simultanée de tous les pixels (la somme sur i de l'équation II.30 vient de la vraisemblance globale). De façon analogue au SART, il est possible de changer le mode de prise en compte des données : les pixels sont rassemblés en sous-groupe (appelés *subsets*). Ce procédé (appelé aussi *ordered-subsets* : OS) permet d'accélérer la convergence pour un même algorithme (Exemple OS-EM [56] : *Ordered-Subset Expectation-Maximisation*).

Selon le terme de régularisation, la convergence des algorithmes est démontrée dans le cas où tous les voxels sont mis à jour simultanément : on nomme ce mode de mise à jour le mode synchrone. Dans le cas d'une fonction de coût avec terme de régularisation, la mise à jour exprimée en un voxel dépend de la valeur de ses voisins. Ainsi d'autres modes de mise à jour peuvent être implémentés. Il est possible de ne mettre qu'un voxel à jour à la fois : mode asynchrone. Ce type de mise à jour est référencé sous le terme de ICD (*Iterative Coordinate Descent* [1]) et regroupe plusieurs schémas algorithmiques possibles. D'autres modes de mise à jour existent : par exemple la mise à jour en damier (un voxel sur deux). S'il y a changement de mode de mise à jour et/ou de prise en compte de données, dans beaucoup de cas la convergence de l'algorithme est encore démontrée et est nettement accélérée [29].

En plus de ces considérations de modes de mise à jour, la propriété de parallélisation du schéma algorithmique peut être étudiée. Un calcul en parallèle de la contribution des pixels permet de gagner en temps de reconstruction. L'opération la plus coûteuse en calcul lors d'une reconstruction est le calcul des coefficients de la matrice système A_{ij} (cf figure I.9). En effet, à cause de la taille de cette matrice, il est préférable de ne pas la stocker mais de recalculer la projection/rétroprojection. Ces opérations peuvent être soit réalisées de façon "ray-driven" : pour un pixel (i.e. un chemin de rayon) donné on calcule tous les voxels traversés par ce rayon ou de manière "voxel-driven" : pour un voxel donné on calcule tous les pixels sur lesquels celui-ci a de l'influence. Cette deuxième méthode, moins répandue se révèle plus efficace [57] dans un algorithme de type ICD avec terme de régularisation défini localement. Néanmoins elle nécessite un bon échantillonnage du volume : en cas de voxels trop grands par rapport aux pixels, le bruit augmente [24]. La première façon (ray-driven) reste la plus utilisée sous la forme de l'algorithme de Joseph [58]. Le calcul de la matrice A est aussi sujet à optimisation [59].

On propose de classer les différents algorithmes d'optimisation utilisés en tomographie en trois catégories : ceux basés sur le gradient, ceux avec fonction de substitution et ceux avec minimisation alternée (aussi nommés "variable splitting").

Algorithmes basés sur le gradient : Le schéma de base de ces algorithmes est pour le cas d'une minimisation :

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n - \rho(\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n} \quad (\text{II.31})$$

où ρ est appelé le pas de descente et $(\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n} = \frac{\partial\Phi(m;\mu^n)}{\partial\mu_j}$ (j^e coordonnée du gradient calculé en $\mu = \mu^n$). Dans le cas d'un pas fixe, ce schéma est appelé descente de gradient à pas fixe [60]. Une manière d'améliorer ce simple schéma est d'optimiser la valeur prise par ρ (cf annexe B).

Le calcul de la valeur optimale pour ρ n'est pas forcément analytique (cf annexe B) et il peut se révéler lourd (si nécessité de calculer le hessien). On utilise plutôt l'algorithme de gradient conjugué [8] (décrit dans l'annexe B). Le principe de cet algorithme est de faire évoluer la solution selon des directions d dites conjuguées. Cela est plus pertinent que d'évoluer selon la direction du gradient et l'algorithme est assuré de converger en autant d'itérations que la dimension de l'image cherchée. Cette propriété n'est pas très utile en tomographie car l'image est très grande mais la vitesse de convergence est accélérée par rapport à la descente de gradient à pas optimal.

La version ICD (mis à jour d'un seul voxel à la fois) appliquée en descente de gradient à pas optimal donne le schéma itératif suivant pour une fonctionnelle quadratique :

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n - \frac{(\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n}}{H_{jj}^n} \quad (\text{II.32})$$

L'algorithme le plus efficace de la famille d'algorithmes basés sur le gradient reste l'algorithme de gradient conjugué dans le cas d'une solution non bornée (sans contrainte de positivité par exemple ou alors de modèle objet plus complexe). Les algorithmes de cette catégorie sont pertinents dans le cas d'une vraisemblance quadratique avec un *a priori* convexe. Cette dernière condition dépend de la fonction de potentiel utilisée (cf équation II.25).

Algorithmes avec fonction de substitution "Surrogate functions" : A la place de minimiser directement la fonction de coût, l'optimisation est "transférée" à chaque itération sur une fonction de substitution $Q(\mu; \mu^n)$ qui a les propriétés suivantes [61] :

1. $Q(\mu^n; \mu^n) = \Phi(\mu^n)$
2. $(\nabla Q)_j|_{\mu=\mu^n} = (\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n}$
3. $\forall \mu > 0 \quad Q(\mu; \mu^n) > \Phi(\mu)$

Ces propriétés assurent qu'en minimisant Q , Φ est aussi minimisée. L'efficacité de ces algorithmes dépend du choix de Q . La difficulté est de trouver la fonction de substitution la plus efficace possible : le plus proche possible en restant minimisable de façon analytique. Dans le cas de la maximisation de la log-vraisemblance poissonnienne, trouver la fonction de substitution se révèle complexe, il est préférable d'étudier son développement en série de Taylor à l'ordre 2 à chaque itération :

$$\Phi(\mu) = \Phi(\mu^n) + (\mu - \mu^n)(\nabla\Phi)|_{\mu=\mu^n} + \frac{1}{2}^T(\mu - \mu^n)H^n(\mu - \mu^n) \quad (\text{II.33})$$

où H^n est la matrice hessienne. Il est ainsi plus facile de trouver une fonction de substitution pour cette expression selon les propriétés de H^n : c'est le cas de l'algorithme ML-Tr (*Maximum Likelihood - Transmission*) introduit dans la thèse de B. De Man [3] (cf annexe D).

La version ICD de ces algorithmes [30] implique que Q soit séparable en fonctions ne dépendant que des μ_j ("Separable quadratic surrogates" [47]) :

$$Q(\mu; \mu^n) = \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_v} q_i(m_i; [A\mu^n]_i; \mu_j) \quad (\text{II.34})$$

Les algorithmes avec fonction de substitution sont adaptés dans le cas d'une fonction de coût convexe. Ils ont montré de bonnes performances dans l'optimisation de la log-vraisemblance poissonnienne pénalisée [30].

Algorithmes de minimisation alternée : Dans cette catégorie se trouvent les algorithmes qui introduisent une ou plusieurs variables complémentaires pour minimiser la fonctionnelle. Ces algorithmes se sont beaucoup développés ces dernières années [62, 63] dans le cas d'utilisation de fonctionnelles comprenant des singularités mathématiques (comme dans le cas de la norme TV ou de la norme l_1) et permettent de minimiser des fonctionnelles complexes plus efficacement que les algorithmes basés sur le gradient. Ils se révèlent aussi efficaces dans le cas de reconstructions tomographiques avec peu de projections.

Ces algorithmes ont souvent été introduits dans le cas de problèmes de restauration d'image (dé-bruitage). Principalement trois algorithmes ont ensuite été appliqués au problème de reconstruction tomographique : la méthode Split Bregman (Goldstein et Osher, 2009 [64]) ; l'ADMM qui dérive de celle-ci (*Alternating Direction Method of Multipliers*, Boyd et al. , 2011 [4]) et l'algorithme de Chambolle&Pock (Chambolle et Pock, 2010 [65]). Nous détaillons la formulation de ces problèmes dans l'annexe B.

La stratégie de ces algorithmes est de diviser le problème en plusieurs sous-problèmes plus simples à résoudre ("diviser pour mieux régner") et s'applique généralement au problème aux moindres carrés pondérés avec la norme TV :

$$\mu^* = \arg \left\{ \min_{\mu} \left[\frac{1}{2} \|p - A\mu\|_{\Sigma}^2 + \beta.TV(\mu) \right] \right\} \quad (\text{II.35})$$

avec $p = -\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$ la mesure en atténuation et β le poids de la régularisation. Ceci est bien un problème de reconstruction scalaire. Vandeghinste et al. [66] le résolvent en adaptant la méthode Split-Bregman, Fessler et al. [38] la méthode ADMM et Sidky et al. [53] l'algorithme de Chambolle&Pock.

Les algorithmes de minimisation alternée cités ci-dessus ont été développés pour l'optimisation de fonctionnelle avec singularité ou non convexe. Cela peut être le cas selon le terme de régularisation ou le modèle direct utilisé. Dans ces cas énoncés, les algorithmes basés sur le gradient ou avec fonction de substitution ne peuvent pas être appliqués ou alors convergent lentement. De plus, même régularisées, les reconstructions scalaires présentent des erreurs dues aux artéfacts métalliques et d'affaîssement à cause d'approximation sur la mesure en atténuation (cf équation I.8). C'est pourquoi des reconstructions spectrales ont été développées. Les algorithmes de minimisation alternée se révèlent très pertinents dans une catégorie de reconstruction spectrale : les approches *One-Step* (cf sous-partie II.2.2).

II.2 Reconstruction spectrale

Nous nous plaçons maintenant dans le cas d'une reconstruction spectrale. C'est à dire une méthode qui cherche à reconstruire un volume en coefficient d'atténuation linéique et sa dépendance énergétique : $\mu_j(E)$ (avec $j \in [1, N_v]$ et $E \in [1, N_E]$). Cet objectif nécessite une mesure résolue en énergie de l'objet : on est alors dans le cas du "spectral CT". Cela désigne à la fois les systèmes de mesure bi-énergie avec détecteurs à intégration et les systèmes de mesure avec détecteurs à comptage de photons. Dans les deux cas nous notons le vecteur de mesure en un pixel i : $\{m_i^1; \dots; m_i^c; \dots; m_i^{N_c}\}$ ($N_c = 2$ en bi-énergie).

Le plus souvent, pour étudier la dépendance énergétique du coefficient d'atténuation, l'hypothèse d'Alvarez est utilisée (cf équation I.13). Le problème de la décomposition en base de fonction vient donc s'ajouter à celui de l'inversion géométrique de la transformée de Radon. Dans le cas du problème avec détecteur à comptage (appelé PCD-CT dans la suite : *Photon-Counting Detector-Computed Tomography*), un problème supplémentaire entre en jeu. Comme montré dans le chapitre 1, les détecteurs à comptage engendrent une distorsion spectrale. Celle-ci doit être prise en compte. Pour cela, il faut calibrer et inverser un modèle détecteur. Même quand celui-ci est défini comme linéaire, il n'est pas simple à inverser (la matrice DRM est non inversible).

On peut diviser les méthodes de reconstruction spectrale en deux catégories : celles qui inversent les problèmes en plusieurs étapes : les approches *Two-Step* et celles qui inversent les deux modèles (projection et détecteur) en même temps : les approches *One-Step* (cf figure II.5).

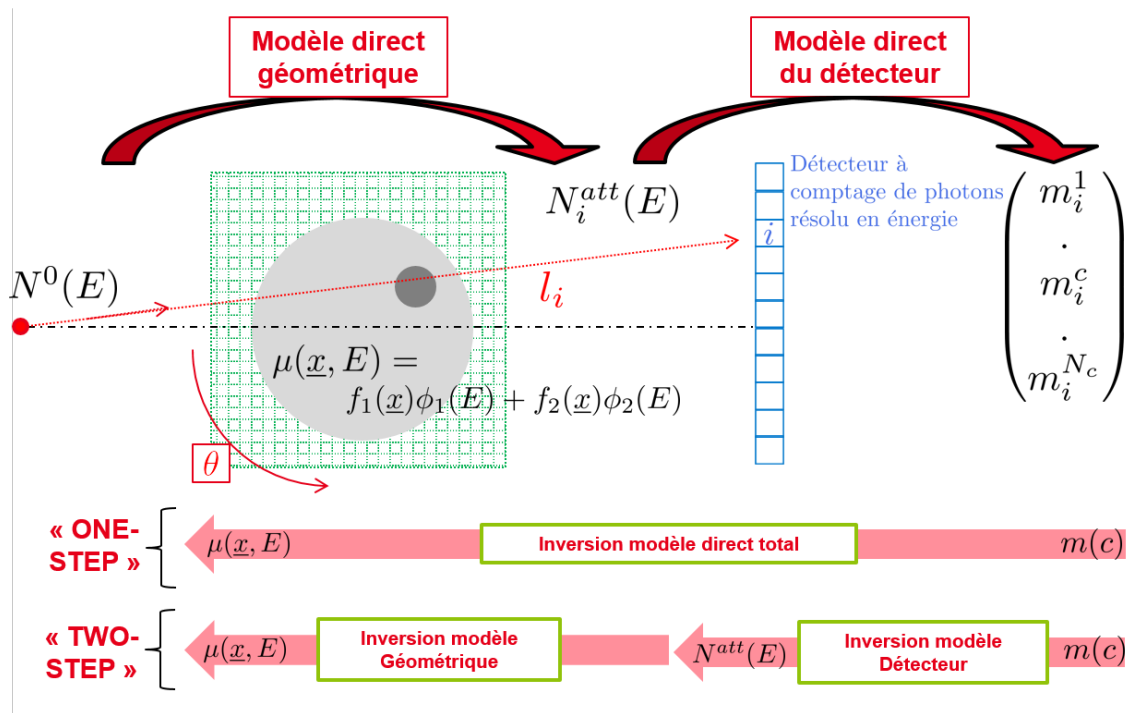


FIGURE II.5 – Schéma du problème total PCD-CT et des différentes approches.

La décomposition en base de fonctions peut intervenir à différentes étapes : lors de l'inversion de la projection géométrique ou de l'inversion du modèle détecteur.

Nous développons dans les prochaines sous-parties les principales méthodes *Two-Step* et *One-Step*. Pour chaque classe d'approche un tableau bibliographique non exhaustif est présenté. Nous citons principalement des auteurs ayant appliqué des méthodes de reconstruction spectrale au problème de PCD-CT (une littérature très importante existe aussi pour les systèmes bi-énergie).

II.2.1 Reconstruction spectrale - *Two-Step*

Dans ce type d'approche, on inverse le modèle direct total en deux étapes. Il existe plusieurs possibilités pour diviser le problème :

1. *Image-Based*
2. *Projection-based*
3. *Quasi-Monochromatique*

Nous les détaillons dans la suite de cette partie. Dans ces trois cas, la reconstruction tomographique (inversion du modèle de projection cf schéma II.5) est une reconstruction scalaire. Elle peut être effectuée par une simple méthode de rétro-projection filtrée comme dans la majorité des articles cités dans cette sous-partie *Two-Step*.

II.2.1.1 Approche *Image-Based*

Comme introduit dans la partie I.5, la décomposition peut être effectuée soit sur le volume soit sur les projections. La première méthode que nous détaillons est la méthode *Image-Based* ou méthode post-reconstruction. Dans ce cas-là, le problème de décomposition en base de fonctions est géré séparément de l'inversion géométrique et après celle-ci (cf figure II.6). Les différents sinogrammes mesurés ($m^1; \dots; m^c; \dots; m^{N_c}$) sont reconstruits séparément par une reconstruction scalaire. Ainsi on obtient autant de volumes ($\langle \mu^1 \rangle; \dots; \langle \mu^c \rangle; \dots; \langle \mu^{N_c} \rangle$) que de canaux énergétiques mesurés.

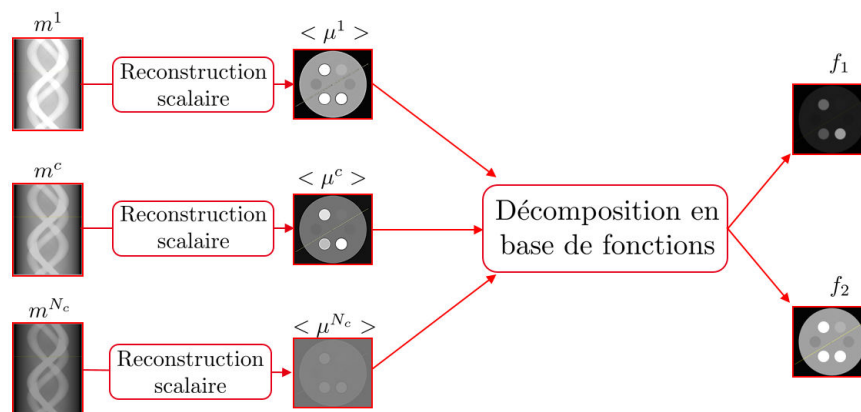


FIGURE II.6 – Schéma de l'approche *Image-Based*.

L'avantage de la méthode *Image-Based* est qu'elle est simple à mettre en œuvre car il ne s'agit que de l'utilisation en série de reconstructions conventionnelles : acquisition d'une mesure vectorielle puis on applique une rétroprojection filtrée sur chaque canal de mesure. Mais en l'absence de traitement des mesures, le phénomène de durcissement de spectre est observé dans les volumes reconstruits. En effet, dans chaque sinogramme reconstruit plusieurs énergies ont contribué à la mesure. Ainsi, on reconstruit un μ moyen par canal. Cela engendre des artéfacts d'autant plus marqués que les canaux sont larges (cf sous-partie I.4).

Cette méthode a été utilisée au début de la mise au point des protocoles de mesures bi-énergie [67]. La méthode pour décomposer les images reconstruites est une méthode de moindres carrés par rapport à des volumes calibrés [17, 68–72]. La difficulté de cette méthode vient du fait que les images reconstruites possèdent des artéfacts et sont bruitées. Ainsi la méthode de décomposition peut être faussée. L'avantage est de pouvoir imposer des contraintes sur l'objet. Par exemple, certains auteurs contraignent chaque voxel à ne contenir qu'un seul matériau (identification puis quantification) ou un mélange connu [68–70, 72]. Il est possible d'ajouter une contrainte de non-négativité sur les densités de base [71] ou alors un lissage spatial [17].

Curtis et al. [71] montrent l'importance du choix de la base de calibration sur le résultat final. Dans le cas du PCD-CT, Su et al. [17] montrent que l'augmentation du nombre de canaux (jusqu'à 60) peut améliorer la différenciation entre certains matériaux sans être pénalisé par le bruit.

En conclusion, les approches *Image-Based* se révèlent rapides, efficaces et faciles à mettre en œuvre. Le tableau II.4 rappelle quelques méthodes *Image-Based* de la littérature. Elles ont l'avantage de pouvoir appliquer des contraintes sur le volume reconstruit (traduction de la connaissance *a priori*). Elles se montrent robustes au bruit et pertinentes dans le cas de matériaux proches. Cependant, elles restent sensibles à une juste calibration et aux artéfacts présents dans les reconstructions.

Auteur, année	Nombre de matériaux de base	Modèle Objet	Résultats sur simu. et/ou exp.*	Nombre de canaux
Maaß et al., 2008 [68]	2 matériaux	Identification puis quantification	Simu.	DECT
Le et al., 2011 [69]	3 ou 4 matériaux	Identification puis quantification	Exp.	5 canaux (Mammographie : 22-80keV)
Alessio et al. , 2013 [70]	4 matériaux	Identification d'un mélange puis quantification	Exp.	5 canaux
Curtis et al. , 2017 [71]	3 matériaux Objectif : mesure d'une densité de Gd	Décomposition simple avec contrainte de non-négativité et de d'additivité	Exp.	5 canaux
Su et al., 2018 [17]	3 matériaux	Décomposition simple + lissage spatial	Simu.	Etude entre 6 et 60 canaux
Bateman et al., 2018 [72]	3 matériaux	Identification d'un mélange puis quantification	Exp.	5 canaux

TABLE II.4 – Tableau bibliographique des méthodes *Two-Step/Projection-Based*.

*Exprime si la méthode a été étudiée dans le cas de données issues de la simulation ("simu.") ou de données réelles expérimentales ("exp").

II.2.1.2 Approche *Projection-Based*

Une autre méthode de séparation des problèmes est la méthode *Projection-Based* ou méthode pré-reconstruction. Dans ce cas-là, la décomposition en base de fonction est réalisée sur les sinogrammes mesurés (cf figure II.7). On obtient ainsi deux sinogrammes en longueur de matériau : $(l_{1i}; l_{2i})$ avec $i \in [1; N_p]$. La décomposition en base de fonction se fait parfois sur les effets physiques d'atténuation Photoélectrique/Compton (cf équation I.13). Pour plus de clarté, nous appelons aussi longueur de matériau de base la projection de ces volumes. Ensuite une reconstruction scalaire permet d'obtenir deux volumes matériau : $(f_{1j}; f_{2j})$ avec $j \in [1; N_v]$. Une simple reconstruction analytique de type rétroprojection filtrée permet de reconstruire sans artéfact un sinogramme en longueur de matériau de base car ce dernier est bien équivalent à la transformée de Radon d'un volume en densité de matériau. Ainsi la qualité de cette méthode de reconstruction dépend principalement de la qualité de la décomposition en longueur matériau de base. L'utilisation d'une base de calibration pour décomposer les sinogrammes mesurés a permis des reconstructions spectrales *Projection-Based* dès la mise au point de protocoles d'acquisition bi-énergie [73–75].

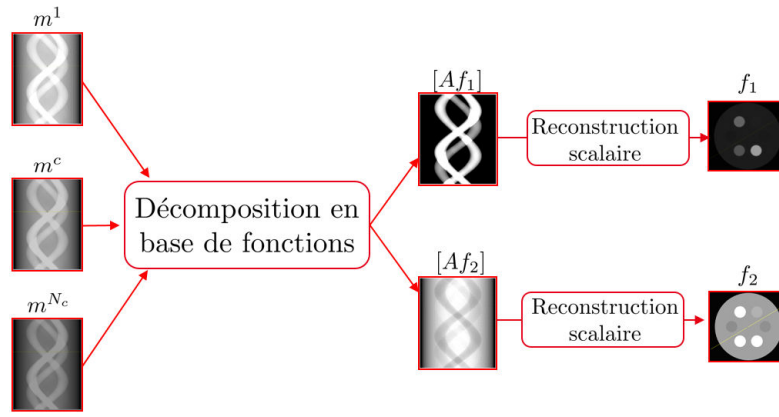


FIGURE II.7 – Schéma de l'approche Projection-based. $[Af_b] = l_b$ sont les longueurs matériaux de base.

On peut classer les méthodes *Projection-Based* en deux sous-catégories : les méthodes avec fonction inverse explicite ou avec inversion itérative d'un modèle statistique.

Avec une fonction inverse explicite Le principe des méthodes avec fonction inverse est de définir une fonction F qui estime directement les longueurs matériaux l_{1i} et l_{2i} en chaque pixel i à partir des mesures $(m_i^1; \dots; m_i^c; \dots; m_i^{N_c})$ du détecteur à comptage résolu en énergie :

$$(l_{1i}; l_{2i}) = F(m_i^1; \dots; m_i^c; \dots; m_i^{N_c}) \quad (\text{II.36})$$

Une base de calibration est utilisée pour trouver cette fonction inverse F qui est indépendante du pixel. Une fois les matériaux de base choisis, on réalise des mesures m_{calib} pour des longueurs données connues de ces matériaux. Les différentes longueurs $[l_b]^{calib}$ constituent la base de calibration.

Plusieurs fonctions inverses sont utilisées dans la littérature (répertoriées dans le tableau II.5) :

- F est une fonction polynomiale d'ordre 2 ou 3 [76, 77]. Les coefficients du polynôme sont estimés par minimisation d'un critère aux moindres carrés (en pratique une fonction est déterminée pour chaque matériau de base b) :

$$F_b^* = \arg \left\{ \min_{F \in \mathcal{P}^2} \left[\left\| [l_b]^{calib} - F(m_{calib}^1; \dots; m_{calib}^c; \dots; m_{calib}^{N_c}) \right\|_2^2 \right] \right\} \quad (\text{II.37})$$

Il est possible d'améliorer cette méthode en divisant la gamme d'atténuation en plusieurs zones et de calculer un polynôme pour chaque zone. Cela permet plus de précision dans le cas de large gammes d'atténuation.

- F est une combinaison linéaire de polynôme d'ordre 4 [78] (obtenue par résolution du problème II.37).
- F est obtenue par la méthode "Linearized MLE" [79–81] et la relation II.36 devient (en fonction de $p_i = (p_i^1; \dots; p_i^c; \dots; p_i^{N_c})$, $p_i^c = \ln \left(\frac{m_i^c}{m_{0i}^c} \right)$) :

$$(l_{1i}; l_{2i})_{MLE} = ({}^T M^{calib} R_{\Sigma}^{-1} M^{calib})^{-1} {}^T M^{calib} R_{\Sigma}^{-1} p_i \quad (\text{II.38})$$

qui est l'inversion [82] de la relation $\bar{p}_i = M^{calib} \cdot (l_{1i}; l_{2i}) + \epsilon (*)$ où \bar{p}_i est le vecteur des projections estimées et $\epsilon \sim \mathcal{N}(0; R_{\Sigma})$ avec R_{Σ} la matrice de covariance de la loi de probabilité $P(p|(l_{1i}; l_{2i}))$. R_{Σ} est calculée à partir de la base de calibration et M^{calib} est

obtenue par résolution de :

$$M^{calib*} = arg \left\{ \min_M \left[||[p]^{calib} - M^{calib}(l_1^{calib}; l_2^{calib})||_{R_\Sigma}^2 \right] \right\} \quad (II.39)$$

- Il est aussi possible d'utiliser un réseau de neurones [81]. Ce réseau de neurones, une fois l'étape d'apprentissage faite, permet d'estimer les longueurs matériaux à partir des mesures par des opérations mathématiques non-itératives [81] (additions, multiplications et évaluations de fonctions linéaires ou sigmoïdes).

Le choix de la complexité de la fonction inverse conditionne la taille de la base de calibration. Néanmoins l'estimation de la fonction inverse F devient instable lorsque la base est trop grande [79]. L'avantage est que le modèle détecteur et le spectre incident n'ont pas besoin d'être connus, ce qui constitue, comme nous le verrons, une difficulté dans les méthodes avec modèle direct.

L'inconvénient des méthodes avec base de calibration reste le besoin de recalibrer lorsque les conditions d'acquisition changent. L'avantage principal de ces méthodes est le temps de calcul. Une fois la fonction inverse trouvée, il n'y a plus de processus itératif et l'obtention des longueurs matériaux est immédiate. Toutefois, à partir du biais estimés par l'application de la méthode sur les données de la base de calibration, certains auteurs [79] implémentent une correction itérative de celui-ci. Certaines des méthodes décrites ont aussi été utilisées dans le cas de système bi-énergie avec détecteurs à intégration [73, 75, 76].

Auteur, année	Fonction inverse	Résultats sur simu. et/ou exp.	Nombre de canaux
Potop et al. LDET, 2014 [77]	Polynôme d'ordre 2	Simu.	2 canaux
Wu et al. 2016, [78]	Combinaison de polynômes d'ordre 4	Simu. et Exp.	4 canaux : (2 acquisitions à 2 canaux (DECT))
Alvarez, 2011/2016 [79, 80]	Méthode "Linearized MLE"	Simu.	5 à 18 canaux
Zimmerman et al., 2015 [81]	Comparaison Réseau de neurones et la méthode "Linearized MLE"	Exp.	5 canaux

TABLE II.5 – Tableau bibliographique des fonctions inverses utilisées dans les méthode *Two-Step*.

Avec un modèle direct et une inversion itérative Le principe des approches de cette partie est de définir un modèle direct théorique en fonction des longueurs matériaux :

$$\overline{m}_i^c(l_{1i}; l_{2i}) = G^c(l_{1i}; l_{2i}) \quad (II.40)$$

où G^c est une fonction que nous préciserons dans cette sous-partie. Cette fonction estime les mesures à partir des longueurs matériaux, elle exprime la relation inverse de l'équation II.36.

Ensuite, un modèle statistique est choisi entre les mesures réelles $(m^1; \dots; m^c; \dots; m^{N_c})$ et le modèle direct théorique $(\bar{m}^1; \dots; \bar{m}^c; \dots; \bar{m}^{N_c})$:

$$m_i^c \sim \mathcal{L}oi\left(\bar{m}_i^c(l_{1i}; l_{2i})\right) \quad (\text{II.41})$$

Le modèle statistique peut aussi être défini entre les mesures en atténuation $(p^1; \dots; p^c; \dots; p^{N_c})$ (où $p^c = \ln\left(\frac{m^c}{m^{0c}}\right)$; m^{0c} est la mesure plein flux par canal) et le modèle direct théorique associé $(\bar{p}^1; \dots; \bar{p}^c; \dots; \bar{p}^{N_c})$:

$$p_i^c \sim \mathcal{L}oi\left(\bar{p}_i^c(l_{1i}; l_{2i})\right) \quad (\text{II.42})$$

Puis les longueurs matériaux sont calculées à l'aide du critère de maximum de vraisemblance et d'un algorithme itératif. Par rapport à une méthode itérative statistique de reconstruction tomographique, ces modèles sont de plus petite taille et plus simples à résoudre. Les algorithmes utilisés restent assez simples (algorithme de Nelder-Mead [83] ou algorithme EM [84]). De plus, il s'agit souvent de modèle à inverser où les pixels sont indépendants. Le problème global est donc fortement parallélisable.

Pour définir le modèle direct (la fonction G^c), on peut identifier deux possibilités :

- Un modèle direct avec un modèle détecteur explicite
- Un modèle direct modifié (modèle détecteur implicite)

Les méthodes avec un modèle détecteur explicite :

Dans le cas où une bonne connaissance de la réponse détecteur est possible, les longueurs matériaux sont obtenues efficacement par un modèle statistique (semblable à ceux de la partie II.1.3). Le modèle direct s'écrit pour le pixel i et le canal c :

$$\bar{m}_i^c(l_{1i}; l_{2i}) = \sum_{E=1}^{N_E} N^0(E) DRM(c; E) e^{-\phi_1(E)l_{1i} - \phi_2(E)l_{2i}} \quad (\text{II.43})$$

ce modèle direct implique la connaissance du spectre incident $N^0(E)$, du modèle détecteur $DRM(c; E)$ et des fonctions de base ϕ_1 et ϕ_2 . La modélisation de la dépendance énergétique de $DRM(c; \cdot)$ a été étudiée et des modèles ont été développés pour estimer celle-ci en fonction des phénomènes physiques et électroniques présents [83, 85, 86]. Néanmoins ces modèles doivent être calibrés expérimentalement.

Le tableau II.6 recense les principales publications utilisant un modèle détecteur explicite. Le modèle statistique utilisé diffère selon les auteurs : modèle poissonien [83, 85, 87], modèle gaussien (moindres carrés simple) [84, 88] ou gaussien avec variance variable (moindres carrés pondérés) [89, 90]. Il est possible d'insérer dans ce modèle statistique un terme de régularisation qui vise à lisser spatialement les sinogrammes (fonction de potentiel de Huber ou quadratique [17, 89]). La difficulté est de bien choisir les paramètres de la régularisation et de minimiser une fonctionnelle plus complexe (les pixels ne sont plus indépendants.)

L'avantage de ces méthodes *Two-Step* est de pouvoir insérer un modèle statistique des mesures lors de la décomposition. Comme il est défini par pixel, il peut être complexe sans être coûteux en calcul à minimiser : on minimise un grand nombre de problèmes (autant que de pixels) qui ne dépendent que de quelques variables. Dans le cas d'un terme de régularisation liant les pixels, les

Auteur, année	Modèle Stat.	Modèle détecteur	Résultats sur simu. et/ou exp.	Nombre de canaux
Schlomka et al., 2008 [91]	PL	Modèle détecteur semi-empirique calibré avec une source mono-énergie	Exp.	6 canaux
Schmidt, 2012 [87]	PL	Coefficient $DRM(c; E)$ appris sur une base de calibration	Simu.	5 canaux
Ducros et al., 2017 [89]	PWLS	Modèle explicite [91] Régularisation de type fonction de Huber	Simu.	4 canaux
Hohweiller et al., 2017 [90]	PWLS	Modèle explicite [91] Régularisation de Tikhonov	Simu.	3 canaux
Su et al., 2017 [17]	PWLS	Modèle explicite avec résolution énergétique idéale Régularisation "Patch-based"	Simu.	Etude entre 6 et 60 canaux

TABLE II.6 – Tableau bibliographique des méthodes *Projection-Based* avec modèle de détecteur explicite. PL : Poissonian Likelihood ; LS : Least Square ; PWLS : Penalized Weighted Least Square.

angles de vue peuvent toujours être traités indépendamment : on peut traiter en parallèle les lignes des sinogrammes.

Certaines de ces méthodes ont été mises en œuvre dans le cas de données expérimentales (cf tableau II.6). Dans ce cas, certains paramètres du modèle détecteur doivent être calibrés. Cette calibration peut être effectuée avec une source mono-énergie (raie synchrotron ou source radio-isotope) ou par la mesure de matériaux à raie K. Une bonne connaissance du spectre incident est aussi nécessaire. Celui-ci peut être estimé à partir d'un modèle détecteur calibré et d'une mesure sans objet [92]. Ainsi, si les conditions d'acquisitions changent, la calibration du modèle détecteur reste valable mais le spectre incident doit être recalculé.

Utilisation d'un modèle détecteur implicite :

Le principe de ces méthodes est aussi de construire un modèle direct théorique estimant la mesure à partir des longueurs matériau. Cependant celui-ci est modifié par rapport à la relation II.43 : il ne fait pas intervenir une réponse détecteur explicitement. Les paramètres de ce modèle sont ensuite déterminés en utilisant une base de calibration. Plusieurs possibilités ont été introduites dans la littérature (cf table II.7) :

- Une relation linéaire [93] : $\bar{p}_i = M^{calib}(l_{1i}; l_{2i})$ où M^{calib} est estimée avec la base de calibration.
- Un modèle appelé "Beer-Lambert polychromatique" [94] :

$$\bar{m}_i^c(l_{1i}; l_{2i}) = C^c e^{-\phi_1(\hat{E}^c)l_{1i} - \phi_2(\hat{E}^c)l_{2i}} + \sum_{h=1}^H D_h^c e^{-d_{1h}\phi_1(\hat{E}^c)l_{1i} - d_{2h}\phi_2(\hat{E}^c)l_{2i}} \quad (\text{II.44})$$

où $H \leq 3$ et C^c , D_h , \hat{E}^c et d_{bh} sont estimés à partir de la base de calibration.

- Approximation de la dépendance énergétique de $N_i^{att}(E)$ par des polynômes en énergie $N_i^{att}(E) = \sum_{h=1}^H c_{ih} P_h(E)$ avec $H = 4$ [88]. Une fois les coefficients c_{ih} estimés à partir des

mesures, les longueurs matériaux sont calculées par la résolution de :

$$(l_{1i}^*; l_{2i}^*) = \arg \left\{ \min_{(l_{1i}; l_{2i})} \left[\left\| e^{-\phi_1(E)l_{1i} - \phi_2(E)l_{2i}} - \sum_{h=1}^H c_{ih} P_h^b(E) \right\|_2 \right] \right\} \quad (\text{II.45})$$

Lee et al. [88] implémentent ensuite une méthode itérative de correction de biais.

- La mesure estimée $\overline{m}_i^c(l_1; l_2)$ est obtenue par une interpolation entre les points d'une base de calibration [95]. La difficulté de cette méthode est de trouver une interpolation efficace.

Auteur, année	Modèle direct + Modèle statistique	Résultats sur simu. et/ou exp.	Nombre de canaux
Choi et al., 2013 [93]	Une relation linéaire + WLS	Simu. et Exp.	5 canaux
Ehn et al., 2017 [94]	Modèle "Beer-Lambert polychromatique" + PL	Simu.	2 ou 4 canaux
Lee et al., 2017 [88]	Modèle énergétique polynomial + LS	Simu.	4 canaux
Brambilla et al., 2017 [95]	Une interpolation entre les points de la base de calibration + PL	Exp.	2 à 10 canaux

TABLE II.7 – Tableau Bibliographique des méthodes *Projection-Based* avec simplification du modèle direct. PL : Poissonian Likelihood ; LS : Least Square ; WLS : Weighted Least Square.

Ces méthodes avec modèle direct simplifié nécessitent la détermination des paramètres du modèle à l'aide d'une base de calibration. Ainsi il doit être recalibré si les conditions d'acquisitions changent. L'avantage de ces approches est que le critère de vraisemblance est plus simple et plus stable à inverser par la suite. De plus, elles permettent de s'affranchir de la connaissance explicite du modèle complet de détecteur et du spectre incident.

Conclusion sur les approches *Projection-Based* :

L'avantage de l'approche *Projection-Based* est la réduction notoire des principaux artéfacts de reconstruction. Cependant la décomposition juste des sinogrammes peut se révéler lourde en calcul. De plus, la décomposition en matériau augmente le bruit avant reconstruction : un sinogramme en longueur de matériau après décomposition est plus bruité qu'un sinogramme en atténuation. Su et al. [17] ont montré que l'augmentation des canaux nuit à la qualité du résultat à cause du bruit et malgré la régularisation. Il est à noter qu'une fois la décomposition en longueur de matériau effectuée, il est possible de reconstruire les sinogrammes obtenus de façon jointe. Cela engendre une reconstruction plus importante en calcul mais qui permet de pallier certaines erreurs induites par la décomposition. Nous citons ces méthodes dans les sous-parties II.2.3 et II.2.4.

II.2.1.3 Approche *Quasi-Monochromatique*

Certains auteurs s'affranchissent de la décomposition en base de fonction pour reconstruire le coefficient d'atténuation à plusieurs énergies. Ils cherchent donc dans une première étape à reconstruire le spectre en photons atténués $N^{att}(E)$ avec $E \in [1; N_E]$; c'est-à-dire à inverser la distorsion spectrale directe causée par les détecteurs à comptage. La résolution énergétique obtenue (le nombre de volume de $\mu(E)$ reconstruits) est liée aux nombres de canaux mesurés et au modèle

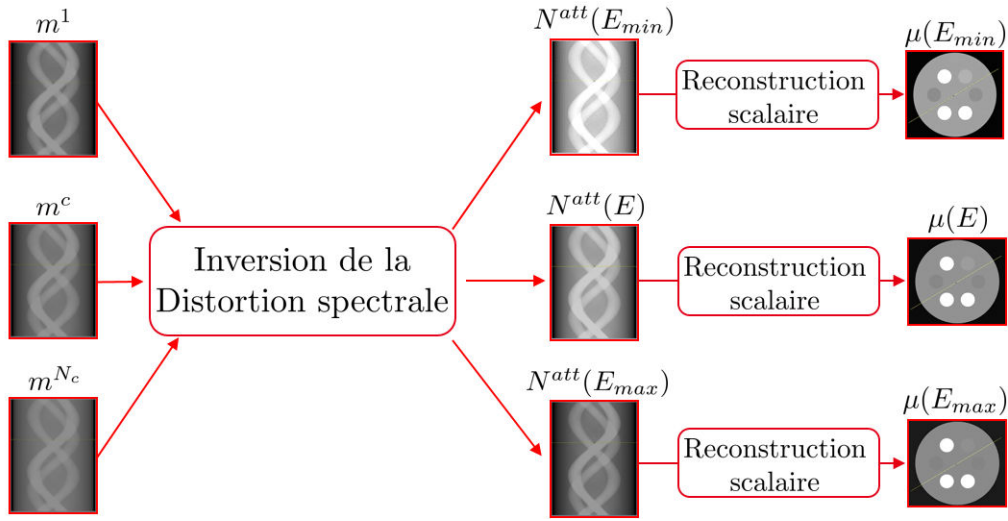


FIGURE II.8 – Schéma de l'approche *Quasi-Monochromatique*.
 $N^{att}(E)$ sont les sinogrammes en nombre de photons atténués.

détecteur. C'est pourquoi ces méthodes présentent un nombre élevé de canaux de mesure et ne sont pas appliquées en bi-énergie mais seulement avec des détecteurs à comptage.

La réponse du détecteur est supposée linéaire dans les modèles sans empilement. Donc le modèle direct s'écrit au pixel i et dans le canal c :

$$\overline{m}_i^c(N^{att}(E)) = \sum_{E=1}^{N_E} DRM(c; E) N^{att}(E) \quad (\text{II.46})$$

Les méthodes *Quasi-Monochromatiques* nécessitent de connaître le modèle détecteur. Les auteurs utilisent des modèles semi-empiriques : des fonctions analytiques dont certains coefficients sont calibrés expérimentalement [85, 91].

Une fois l'inversion de la distorsion spectrale effectuée, une simple reconstruction scalaire peut reconstruire sans artéfacts le coefficient d'atténuation à une certaine énergie : $\mu(E)$. De façon analogue aux approches *Projection-Based*, la gestion du bruit est un point limitant de la méthode. En effet, à dose équivalente, le bruit par canal augmente avec le nombre de canaux de mesure. C'est

Auteur, année	Méthode d'inversion	Modèle détecteur	Résultats sur simu. et/ou exp.	Nombre de canaux
Touch et al., 2016 [96]	Réseau de neurones	Modèle détecteur semi-empirique	Simu. et Exp.	4 canaux ou "full-spectrum mode" : 23 canaux (27-50keV)
Wang et al., 2017 [84]	ML-EM	Modèle hybride simulation Monte-Carlo/Calibration [78]	Simu. et Exp.	9 canaux
Li et al., 2017 [85]	ML-EM	Modèle détecteur semi-empirique	Simu. et Exp.	5 canaux
Wang et al., 2018 [97]	ML-EM + filtre bilatéral	Modèle hybride simulation Monte-Carlo/Calibration [78]	Simu. et Exp.	9 canaux

TABLE II.8 – Tableau bibliographique des méthodes *Quasi-Monochromatiques*.

pourquoi certains auteurs utilisent des méthodes de lissage avant [97] ou après reconstruction [96] des sinogrammes obtenus après l'inversion de la distorsion spectrale.

Il est toujours possible d'étudier la décomposition en matériau de base des volumes après reconstruction [96]. Celle-ci se révèle plus simple car les volumes obtenus avec les méthodes *Quasi-Monochromatiques* sont directement les coefficient d'atténuation à différentes énergies (pas besoin de base de calibration comme dans les approches *Projection-Based*). Le tableau II.8 rappelle les principaux auteurs qui ont développé une approche *Quasi-Monochromatique*. On pourrait y ajouter certaines méthodes qui reconstruisent aussi les sinogrammes en nombre de photons atténués en prenant en compte la corrélation entre les volumes obtenus (cf sous-partie II.2.3).

II.2.1.4 Conclusion sur les approches *Two-Step*

En conclusion, les méthodes *Two-Step* cherchent à se ramener à plusieurs reconstructions scalaires simultanées (le plus souvent effectuées avec une rétroprojection filtrée, méthode la plus efficace pour un compromis temps/conditionnement géométrique). Pour cela, elles doivent soit traiter les données avant reconstruction (approches *Projection-based* ou *Quasi-Monochromatique*) ou alors corriger les volumes reconstruits (approches *Image-based*). Elles sont ainsi efficaces en temps mais sensibles au bruit. En effet, à dose équivalente, le bruit dans un canal sera plus élevé si le nombre de canaux augmente. Ainsi, la succession de traitements/reconstructions scalaires peuvent amplifier le bruit au cours des processus.

C'est pourquoi les méthodes *One-Step* ou avec *a priori* spectral présentées dans les sous-parties suivantes ne reconstruisent pas des sinogrammes en parallèle mais cherchent à les reconstruire de façon jointe. Ceci permet de conserver la statistique globale (et non par canal).

II.2.2 Reconstruction spectrale - *One-Step*

L'autre stratégie pour résoudre le problème de Spectral CT est d'inverser simultanément le modèle détecteur et la projection géométrique tout en utilisant la décomposition en base de matériau. Cette approche est référencée dans la littérature sous le terme *One-Step* [98]. Dans le cas de systèmes bi-énergie, cette approche est aussi appelée *Joint-Based* [39]. Dans ces approches, la méthode de reconstruction ne peut être que statistique car les reconstructions analytiques et algébriques ne peuvent s'appliquer dans ce cadre. Le tableau II.9 compare les approches *One-Step* les plus notables de la littérature.

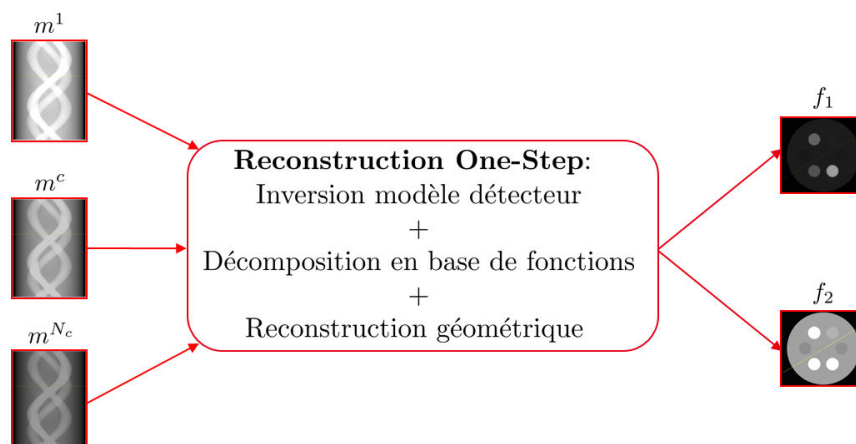


FIGURE II.9 – Schéma de la méthode *One-Step*.

Dans les méthodes *Projection-Based*, le modèle direct s'exprime en fonction de longueurs matériaux. En *One-Step*, il relie directement la mesure brute avec les densités matériaux reconstruites f_1 et f_2 . Dans le cas d'un modèle détecteur défini linéaire, le modèle direct s'écrit :

$$\overline{m}_i^c(f_1; f_2) = \sum_{E=1}^{N_E} DRM(c; E) N^0(E) e^{-\phi_1(E)[A f_1]_i - \phi_2(E)[A f_2]_i} \quad (\text{II.47})$$

avec A la matrice de projection.

Le premier avantage des reconstructions *One-Step* est la disparition des artéfacts et une juste estimation des volumes matériaux de bases. Cela est permis grâce à la description spectrale de la mesure (description plus proche de la physique réelle). De plus, ces approches permettent une meilleure gestion du bruit que les méthodes *Two-Step* car d'une part il ne s'agit pas de traitements en série des mesures et d'autre part, un terme de régularisation est appliqué sur les volumes reconstruits. En effet, dans le cas de la tomographie à rayons X, des volumes lisses par plage de valeurs vont donner des mesures bruitées. Il est donc plus physique de lisser les volumes que les mesures/projections. Le désavantage des approches *One-Step* est le temps de calcul. Le modèle direct est plus lourd à inverser : les algorithmes ont besoin de beaucoup d'itérations pour converger et chaque itération est coûteuse en calcul.

Les reconstructions *One-Step* avec détecteur à comptage de la littérature se basent sur un modèle statistique poissonnien et incluent un terme de régularisation indépendamment sur chaque volume matériau de base reconstruit (norme TV [99] ou fonction de Huber [100]). La difficulté dans les méthodes *One-Step* réside dans la minimisation de la fonction de coût. En effet, la résolution simultanée de la projection géométrique et de la distorsion spectrale engendre un lourd problème d'optimisation car le terme d'attache aux données est non convexe [101].

Une autre difficulté des reconstructions *One-Step* est l'obtention de la juste décomposition en volume matériau de base et l'apport de la tomographie spectrale (du "*Spectral CT*") est surtout contenu dans celle-ci. Dans le cas de reconstructions spectrales, on peut observer le phénomène de *Cross-Talking* : il peut y avoir compensation entre les volumes matériau de base pour obtenir la même valeur du coefficient d'atténuation $\mu(E)$. Dans ce cas on obtient la mauvaise décomposition mais on observe un faible résidu sur la mesure. Par exemple du *Cross-Talking* est observé lorsque l'algorithme est arrêté avant convergence [102]. Pour pallier ce phénomène et accélérer la reconstruction, certains auteurs [99, 102, 103] utilisent un pré-conditionnement des fonctions $\phi_1(E)$ et $\phi_2(E)$: ils cherchent à orthogonaliser la base de fonction pour mieux séparer la mise à jour de chaque volume matériau de base.

Ces méthodes montrent de bons résultats en simulation même si le temps de calcul reste conséquent et encore sujet à optimisation. La qualité du résultat est garantie par l'utilisation d'un terme de régularisation sur les volumes et la description d'un modèle direct spectral (qui prend en compte la dépendance énergétique).

La mise en œuvre expérimentale avec détecteur à comptage rencontre les mêmes difficultés que dans le cas *Two-Step* avec modèle détecteur explicite : la bonne connaissance du spectre incident $N^0(E)$ et du modèle détecteur DRM . Dans le cas de mesures expérimentales [104], une base de calibration est nécessaire pour estimer la réponse du détecteur $DRM(c; E)$ ou un modèle direct semi-empirique. Par exemple, pour palier le manque de connaissance sur le spectre incident et la DRM , Mechlem et al. [100, 105] ont testé deux modèles directs approchés par canal. Ces modèles directs permettent en plus de diminuer la complexité de l'optimisation. Le modèle s'écrit pour le canal c :

$$\overline{m}_i^c(f_1; f_2) = \sum_{r=1}^R C_{ri}^c e^{-[A f_1]_i \phi_1(\overline{E}_{ri}^c) - [A f_2]_i \phi_2(\overline{E}_{ri}^c)} \quad \text{ou} \quad \overline{m}_i^c(f_1; f_2) = m_i^{c0} e^{-P_{c,i}([A f_1]_i; [A f_2]_i)} \quad (\text{II.48})$$

où C_{ri} , \overline{E}_{ri}^c sont des coefficients appris sur la base de calibration ($R = 4$) ; m_i^{c0} est la mesure réelle plein flux et $P_{c,i}$ est un rapport d'un polynôme d'ordre 2 sur un polynôme d'ordre 1 (soit 8 coefficients appris sur la base de calibration). Remarque : l'indice i de pixel de mesure est un indice de pixel physique dans le cas des coefficients à déterminer, car on peut utiliser le même modèle direct pour tous les angles de vue (même détecteur physique).

Dans le cas de reconstructions bi-énergie, les auteurs utilisent pour le spectre incident et la sensibilité du détecteur à comptage des modèles issus de simulation. Chen et al. [106] et Cai et al. [39] identifient cette approximation comme source d'erreurs dans leur application à des données expérimentales. De plus Chen et al. testent leur méthode dans le cas de mesures angulaires partielles (tour incomplet autour de l'objet). Les reconstructions à partir de mesures partielles permettent de réduire la dose absorbée et le temps de mesure/reconstruction.

Auteur, année	Modèle Stat. + Régul.	Algorithme Optimisation	Modèle détecteur	Résultats sur simu. et/ou exp.	Nombre de canaux
Cai et al., 2013 [39]	MC + Huber	Gradient Conjugué	Modèle explicite	Exp.	DECT
Long et al., 2014 [47]	PL + Fonct.(1)	Fonction de substitution	Modèle explicite	Simu.	DECT
Chen et al., 2018 [106]	MC lin(3) + TV	SD POCS (2)	Modèle explicite	Exp.	DECT
Liu et al., 2016 [107]	PL + TV	ADMM (cf partie II.1.3.5)	Modèle explicite	Simu.	15 canaux
Schmidt et al., 2017 [98, 104]	PL + TV	Chambolle&Pock	Modèle détecteur appris sur base de calibration	Exp.	3 canaux
Mechlem et al., 2017 [105]	PL + Huber	Fonctions de substitution (proche de Weidinger et al. [108])	Modèle direct semi-empirique déterminé par base de calibration	Exp.	5 canaux
Tairi et al., 2018 [101]	PL + TV	Algorithme VMILA [109]	Modèle explicite issu de la simulation	Exp.	5 canaux

TABLE II.9 – Tableau bibliographique des méthodes *One-Step*. (DECT : Dual Energy Computed Tomography)

(1) : Troisième fonction présentée dans la table II.3 ; (2) : Steepest Descent + Projection On Convex Sets
(3) : MC lin : modèle gaussien linéarisé (cf réf. [106]) ; PL+TV : Poissonian Likelihood + Total Variation
Modèle explicite signifie que la dépendance énergétique de $DRM(c; E)$ est connue (issue de la simulation).

Conclusion sur les approches *One-Step*

Les méthodes *One-Step* décrivent l'aspect spectral du modèle direct. Elles permettent d'implémenter un terme de régularisation sur les volumes matériau de base reconstruits tout en inversant le modèle détecteur. Cependant, cela engendre des fonctionnelles plus complexes à optimiser que celles utilisées dans les reconstructions scalaires. D'une part le nombre de variables d'optimisation est plus grand, et d'autre part les volumes reconstruits sont dépendants entre eux par la décomposition en base de fonction. Cela signifie que deux décompositions en base de fonction différentes peuvent donner des termes d'attache aux données proches. Dans le cas d'une reconstruction *Two-Step Projection-Based* avec méthode de décomposition itérative (méthodes décrites dans le paragraphe II.2.1.2), cette problématique est aussi rencontrée mais elle n'est plus présente lors de la

reconstruction géométrique. La différence dans le cas d'une méthode *One-Step* est que la décomposition en base de fonction est réalisée simultanément avec l'inversion géométrique. Ainsi, cette incertitude sur la décomposition est toujours présente au cours des itérations et jusqu'au résultat final. C'est pourquoi la juste décomposition en base de fonction est plus complexe à obtenir et demande plus de temps de calcul qu'une méthode de reconstruction tomographique scalaire ou qu'une méthode *Two-Step* avec méthode de décomposition itérative.

Le problème de reconstruction *One-Step* nécessite donc des algorithmes d'optimisation performants. Pour cela, des algorithmes de dé-bruitage ou utilisés en reconstruction scalaire ont adaptés au cas de la reconstruction *One-Step*. Dans le cas de reconstructions à partir de données expérimentales issues de détecteurs à comptage, celles-ci sont précédées d'acquisitions sur une base de calibration pour apprendre les paramètres du modèle direct. Mory et al. ont réalisé une comparaison poussée des principales méthodes *One-Step* (références [39, 47, 104, 105, 108]) et ont montré que la méthode de Mechlem et al. [105] se révèle pour l'instant la plus rapide.

II.2.3 A priori spectraux

Dans le cas d'une reconstruction *One-Step*, il est possible d'utiliser d'autres *a priori* que des termes d'*a priori* spatiaux. Il s'agit de terme de régularisation qui sont définis en plus d'un terme de lissage spatial.

Il est à noter que la décomposition en base de fonction constitue un *a priori* spectral fort :

$$\mu(\underline{x}, E) = f_1(\underline{x})\phi_1(E) + f_2(\underline{x})\phi_2(E) \quad (\text{II.49})$$

Le choix des fonctions de base ϕ_1 et ϕ_2 conditionne l'espace des solutions pour $\mu(\underline{x}; E)$ et sa dépendance énergétique. Le plus souvent, la régularisation spatiale porte sur les volumes de base f_1 et f_2 mais il est aussi possible de l'appliquer sur la re-composition de ces matériaux pour former le coefficient d'atténuation (l'appliquer sur $\mu(\underline{x}, E)$).

A priori dans l'espace ($f_1; f_2$)

- Nakada et al. [110] effectuent une reconstruction *One-Step* et proposent un *a priori* dans le plan ($f_1; f_2$). Ils supposent connus les matériaux présents dans le volume (9 matériaux possibles dans Nakada et al). Puis, à chaque voxel j est attribué un label matériau en fonction de ses valeurs ($f_{1j}; f_{2j}$). Ce label peut évoluer au cours de la reconstruction. Chaque matériau possible a sa décomposition en matériaux de base connue ($f_1^m; f_2^m$) ($m \in [1; 9]$ indice de matériau présent). Une loi gaussienne est ensuite définie qui tend à rapprocher chaque voxel de sa décomposition théorique en fonction de son label. Ce terme de régularisation s'exprime sous la forme :

$$R(f_{1j}; f_{2j}) = \sum_{m=1}^9 z_j^m T(f_{1j} - f_1^m; f_{2j} - f_2^m) \Sigma_m^{-1} (f_{1j} - f_1^m; f_{2j} - f_2^m) \quad (\text{II.50})$$

où z_j^m est égal à 0 ou 1 selon l'appartenance au matériau et Σ_m est la matrice de covariance de la loi gaussienne utilisée.

- Dans le cadre d'une autre technologie d'imagerie médicale (l'IRM : Image à Résonance Magnétique), Roche et al. [111] introduisent un terme de régularisation de volume partiel. Dans le cas d'une reconstruction à deux matériaux, celui-ci s'exprime :

$$R(f_{1j}; f_{2j}) = {}^T(f_{1j}; f_{2j})V(\alpha)(f_{1j}; f_{2j}) \quad \text{où} \quad V(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.51})$$

En fonction du choix des matériaux de base et des connaissances sur l'objet d'étude, ce terme peut servir à privilégier plus ou moins des valeurs proches ou éloignées pour f_{1j} et f_{2j} (Si $\alpha \rightarrow +\infty$, ce terme de régularisation devient infini sauf si f_{1j} ou f_{2j} tend vers 0). Ce terme se généralise facilement au cas de la reconstruction à trois matériaux de base. Il permet aussi de gérer les voxels à la frontière entre deux matériaux. Il est semblable à certaines contraintes appliquées dans le cas d'approches *Image-Based* [71].

A priori dans l'espace $[\mu_j(E)]_{E \in [1; N_E]}$

Il est possible de réaliser une reconstruction spectrale autrement qu'avec une reconstruction en base de fonction : approche *Quasi-Monochromatique* (cf sous-partie II.2.1.3). Dans ce cas il faut reconstruire assez de volumes de coefficient d'atténuation linéique pour tracer la dépendance en énergie de chaque voxel.

- Gonzales et al. [112] utilisent un détecteur très discriminant en énergie pour reconstruire 95 volumes de μ à moins d'1keV d'écart. Ces reconstructions se font de manière non indépendante. De façon analogue à un lissage spatial, ils définissent ainsi un terme de régularisation entre deux volumes à énergies voisines :

$$R(\mu_j(E)) = \sum_{E'=1}^{N_v} w_{\{E'E\}} V(\mu_j(E') - \mu_j(E)) \text{ avec } V(t) = \left(t - \frac{\delta}{2}\right)^2 \quad (\text{II.52})$$

où $w_{\{E'E\}}$ est le poids attribué aux voisins énergétiques et δ est un seuil à choisir. Ce terme lisse la dépendance énergétique de $\mu_j(E)$, de manière moins forte qu'une décomposition en base de fonction.

- Dans le cas de reconstructions *Quasi-Monochromatiques*, nous avons vu que le bruit peut poser problème. Une première façon de gérer le bruit est d'utiliser une reconstruction statistique et d'ajouter un terme de régularisation par énergie reconstruite [113, 114] (cf équation II.28) :

$$R(\mu) = \sum_{E=1}^{N_E} TV(\mu(E)) \quad (\text{II.53})$$

où chaque $\mu(E)$ est un vecteur de taille N_v .

Le terme de l'équation II.53 ne couple pas les énergies entre elles. Rigie et al. [113] reconstruisent 5 énergies de façon jointe et proposent comme terme :

$$R(\mu) = \sum_{j=1}^{N_v} TV(\mu_j) \quad (\text{II.54})$$

où chaque μ_j est un vecteur de taille N_E .

- Kazanstev et al. [114] présentent ce terme sur une reconstruction de 70 énergies. Pour cela, les auteurs prennent comme référence les énergies les moins bruitées. Les variations spatiales (i.e. le gradient) de ces énergies (présence et orientation de contours) sont prises en compte dans la mise à jour des énergies plus bruitées.

Les reconstructions de Rigie et al. [113] et Kazanstev et al. [114] n'ont été appliquées qu'en simulation. En effet, elles prennent en données d'entrée les sinogrammes en nombre de photons atténués. Cela nécessite un traitement des données de type reconstruction *Quasi-Monochromatique*

(cf sous-partie II.2.1.3). L'application de ces méthodes aux données brutes issues d'un détecteur à comptage pourrait engendrer des artéfacts lors de la reconstruction (causés par la distorsion spectrale : plusieurs énergies contribuent à la mesure dans un même canal).

II.2.4 Covariance dans la décomposition en base de fonction

Dans les méthodes utilisant la décomposition en base de fonction, on remarque de la co-variance entre les volumes matériau de base reconstruits (cf figure II.10). Les voxels d'un même matériau vont former des nuages allongés le long d'une droite dans une carte $(f_1; f_2)$. Cela traduit le fait que les valeurs de f_{1j} et f_{2j} d'un même voxel sont liées :

$$\langle \mu \rangle = f_1 \langle \phi_1 \rangle + f_2 \langle \phi_2 \rangle \quad (\text{II.55})$$

L'interprétation de la pente de la droite de l'équation II.55 n'est pas encore expliquée (signification des coefficients moyens $\langle \phi_1 \rangle$, $\langle \phi_2 \rangle$ et $\langle \mu \rangle$). Néanmoins la covariance peut être mesurée et prise en compte lors d'une reconstruction du type *Projection-Based* [115–117] ou alors après la reconstruction dans une méthode de dé-bruitage post-reconstruction [118, 119].

Au cours de la reconstruction, la prise en compte de la covariance intervient dans le terme d'attache aux données de type moindres carrés [115–117] :

$$\| \mathcal{A}f - l \|_{\Sigma^R}^2 \quad (\text{II.56})$$

avec $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ la matrice de projection par bloc, $f = (f_1; f_2)$ le vecteur des densités de base concaténées et $l = (l_1; l_2)$ le vecteur des longueurs de matériaux concaténées (obtenu par traitement des données de type *Projection-Based*). Σ^R est ici prise non diagonale par bloc. Dans le cas contraire, $\Sigma^R = \begin{pmatrix} \Sigma_1^R & 0 \\ 0 & \Sigma_2^R \end{pmatrix}$ et il s'agit d'une méthode *Projection-Based* classique où les volumes sont reconstruits indépendamment l'un de l'autre.

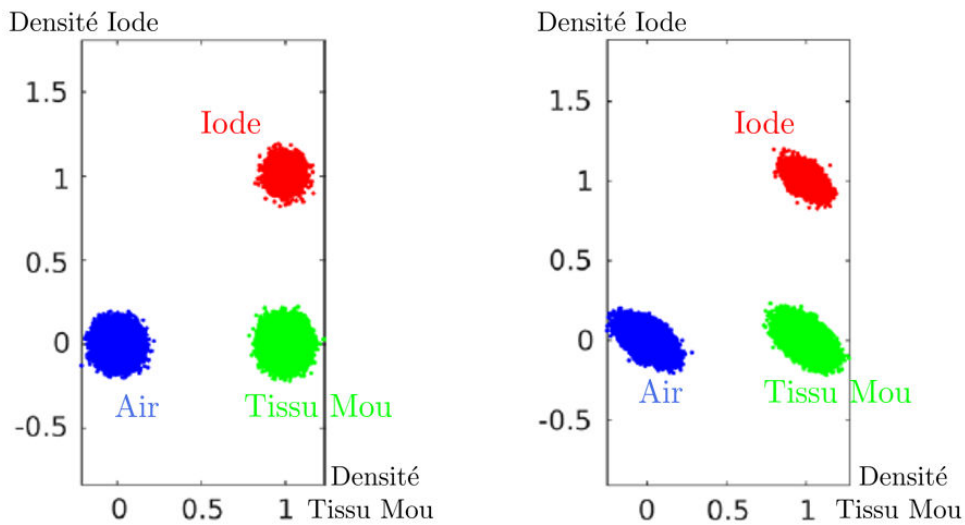


FIGURE II.10 – A gauche : Carte $(f_1; f_2)$ dans le cas de volumes de base bruités séparément.

A droite : Carte $(f_1; f_2)$ dans le cas de volumes de base bruités avec covariance.

Source : Persson et al. [119].

Dans le cas de méthodes de dé-bruitage post-reconstruction [118, 119], le terme d'attache aux données est :

$$\|f' - f\|_{\Sigma_D}^2 \quad (\text{II.57})$$

où $f = (f_1; f_2)$ le vecteur des densités de base reconstruites concaténées, $f' = (f'_1; f'_2)$ le vecteur des densités de base débruitées concaténées et Σ_D est prise non diagonale par bloc. Sinon, $\Sigma^D = \begin{pmatrix} \Sigma_1^D & 0 \\ 0 & \Sigma_2^D \end{pmatrix}$ et les volumes sont débruités indépendamment l'un de l'autre.

En conclusion, l'implémentation d'un terme de covariance peut permettre de réduire le bruit dans les volumes matériaux de bases reconstruits, en particulier dans le cas de la tomographie spectrale avec des données issues d'un système de mesure bi-énergie. En effet, les systèmes bi-énergies fournissent moins d'information spectrale. La décomposition en base de matériau est plus complexe à obtenir avec seulement 2 canaux de mesures qu'avec plus de canaux (6 canaux [115] ou 8 canaux [119]).

Néanmoins Persson et al. [119] ont démontré dans un processus de dé-bruitage qu'il y a un compromis entre réduction du bruit et la suppression d'artéfacts causés par la distorsion spectrale. La difficulté d'implémenter un terme de covariance réside aussi dans l'estimation de celle-ci, qui dépend des conditions d'acquisition.

II.3 Calibration du modèle physique de la mesure spectrale

Dans cette sous-partie, nous présentons un état de l'art des techniques existantes pour calibrer le modèle physique avant l'acquisition avec l'objet. En effet, comme explicité dans les tableaux bibliographiques, toutes les méthodes de reconstruction tomographique spectrale ne sont pas encore appliquées à des données réelles. Pour les appliquer à des cas pratiques, un apprentissage de certaines données du modèle direct théorique dépendant des conditions d'acquisition (paramètre de la source, type détecteur) est nécessaire. Certaines méthodes et certains aspects ont déjà été traités dans la sous-partie précédente. Nous classons dans cette partie les différentes approches indépendamment de la méthode de reconstruction utilisée ultérieurement.

Nous définissons le **spectre efficace** par canal de mesure c comme la combinaison du spectre incident $N^0(E)$ arrivant au pixel de mesure et la réponse du détecteur DRM à ce spectre :

$$S^{eff}(c; E) = DRM(c; E)N^0(E) \quad (\text{II.58})$$

La mesure plein flux (sans objet) donne la valeur : $m^{0c} = \sum_{E=1}^{N_E} DRM(c; E)N^0(E) = \sum_{E=1}^{N_E} S^{eff}(c; E)$.

Chaque coefficient $S^{eff}(c; E)$ du spectre efficace décrit la contribution d'une énergie E dans un canal c . Cette contribution est un nombre de photons par énergie détectés dans le canal c en l'absence d'objet.

Nous classons les différentes approches en trois familles : la calibration d'un modèle détecteur, l'apprentissage d'un spectre efficace explicite et l'apprentissage d'un modèle direct modifié.

II.3.1 Calibration d'un modèle détecteur

Le spectre incident peut être simulé de façon représentative en fonction des paramètres de la source. C'est pourquoi certains auteurs [85, 91] utilisent une calibration pour estimer seulement la réponse du détecteur en fonction de l'énergie. Un modèle paramétrique du détecteur est défini. Il modélise les principaux phénomènes au sein du détecteur : pic principal de la réponse, pics de fluorescence, partage de charge et bruit électronique. Ce modèle contient des paramètres qui sont à

estimer pour chaque pixel du détecteur. Pour cela sont utilisés des sources monochromatiques [91] (raie synchrotron ou source radio-isotope) ou des matériaux avec des raies K dans la gamme énergétique étudiée [85].

Par exemple, le modèle développé par Schlomka et al. (équipe Philips Research [91]) est un modèle dépendant de 6 paramètres a_{1-6} différents pour chaque pixel et déterminés avec une source radio-isotope (source cobalt ^{57}Co à 122keV) :

$$DRM(c; E) = \frac{C^c}{\sqrt{2\pi}\sigma(E)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E_c - E}{\sigma(E)}\right)^2} + \frac{a_1 e^{-a_2 E}}{\sqrt{2\pi}\sigma(E)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E_c - E_e - E}{\sigma(E)}\right)^2} + \mathbf{1}_{\{E_c < E - 3\sigma(E)\}}(a_3 - a_4 E) \quad (\text{II.59})$$

avec $\sigma = a_5 + a_6 E$; E_c l'énergie moyenne du canal de mesure, E_e l'énergie de fluorescence et C^c est défini par la valeur du plein flux. Les Ce modèle a été utilisé dans plusieurs méthodes de reconstruction avec données expérimentales [87, 89–91, 120].

II.3.2 Estimation d'un spectre efficace explicite

Une autre possibilité est d'estimer directement le spectre efficace. Celui-ci intervient dans le modèle direct qui pour le canal de mesure c :

$$m^c = \sum_{E=1}^{N_E} S^{eff}(c; E) e^{-att(E)} \quad (\text{II.60})$$

Dans ce cas, il faut estimer le spectre efficace pour chaque canal : $S^{eff}(c; E)$ avec $c \in [1, N_c]$ et $E \in [1, N_E]$. Une base de calibration est alors utilisée. Elle se compose de longueurs de différents matériaux connus (cf figure II.11). Ces longueurs de matériaux sont mesurées dans les mêmes conditions d'acquisition que celles utilisées pour l'objet étudié. Le terme $att(E)$ étant connu pour les longueurs de la base de calibration, il est possible de déterminer le terme $S^{eff}(c; E)$ par inversion du système II.60. Cependant cette inversion est mal conditionnée et doit se faire avec une méthode itérative.



FIGURE II.11 – Photographie d'un escalier de calibration utilisé en rayons X (Source Schmidt et al. [99]). Il est constitué de deux matériaux (aluminium et plastique PMMA).

En 2005, Sidky et al. [92] utilisent une base de calibration pour estimer des spectres utilisés en mammographie avec un algorithme *ML-EM*. Ils montrent qu'une connaissance préalable de certaines irrégularités du spectre est nécessaire comme le positionnement énergétique des raies du tungstène présentes dans le spectre incident. Ha et al. [121] poursuivent ce travail en imposant une contrainte de régularisation de parcimonie sur le spectre. Plus récemment, Ha et al. [122] appliquent une contrainte pour conserver les raies du tungstène dans le résultat estimé : ils imposent une distance maximale du spectre estimé par rapport à l'état initial en utilisant la distance de Kullback-Leibler.

II.3.3 Estimation d'un modèle direct modifié

L'estimation du spectre efficace est plus précisément nécessaire dans le modèle direct de la mesure que l'on cherche à inverser. Le modèle direct relie deux longueurs matériaux l_1 et l_2 à la mesure réelle :

$$m^c = \sum_{E=1}^{N_E} S^{eff}(c; E) e^{-\phi_1(E)l_1 - \phi_2(E)l_2} \quad (\text{II.61})$$

Plutôt que de prendre le modèle le plus proche des effets physiques (modèle théorique de l'équation II.61), certains auteurs définissent des modèles directs plus simples. Le plus simple est une relation linéaire entre les longueurs matériaux et la mesure [93]. Certains auteurs proposent des relations plus complexes : par exemple le modèle Beer-Lambert polychromatique [94] (cf équation II.48) ou d'expansion polynomiale [123]. Ces modèles dépendent de paramètres qui sont fixés en utilisant une base de calibration. Ils ont l'avantage de dépendre de moins de paramètres qu'un modèle complet de spectre efficace.

Il est possible d'utiliser une modification du modèle physique pour prendre en compte des effets négligés usuellement. Plus particulièrement, des modèles d'empilements commencent à être proposés dans la littérature [124]. Ces modèles dépendent du taux de comptage du détecteur utilisé. Ils peuvent rendre la relation entre la mesure et le spectre en photons atténués non linéaire (les équations II.60 et II.61 ne sont plus valables).

Nous présentons dans le chapitre suivant une discussion sur l'état de l'art des méthodes de reconstruction dans le cas du problème de PCD-CT. Nous introduisons ensuite la méthode de reconstruction que nous avons développée et son positionnement par rapport à l'état de l'art.

Chapitre III

La méthode de reconstruction développée : MLTR-ONE-STEP

III.1 Discussion et positionnement par rapport à l'état de l'art

Comme nous l'avons montré dans le chapitre état de l'art, de nombreuses études portent sur les méthodes de reconstruction tomographique avec détecteurs à comptage. Cependant ces détecteurs ne se sont pas encore imposés dans des protocoles de routine clinique. Une juste description du caractère spectral du modèle direct produit de bons résultats sur des données issues de simulation [47, 90, 98]. Les premiers résultats expérimentaux sont prometteurs avec des modèles de détecteurs linéaires (sans modèle d'empilement) [39, 91]. La calibration de ces modèles peut être une source d'erreurs dans les volumes reconstruits [39, 106].

Des détecteurs à rayons X en comptage mis au point au CEA/LETI/LSIV sont capables de fournir un nombre élevé de canaux : jusqu'à 128, usuellement 64. Ce chiffre est élevé par rapport aux valeurs usuelles de l'état de l'art. Pour l'instant peu de méthodes utilisent plus de 6 canaux avec des données expérimentales. Des premières études en simulation [17] ont montré l'apport possible de l'augmentation du nombre de canaux. Nous investiguons dans les travaux de cette thèse l'apport que peut produire un nombre important de canaux et plus généralement les améliorations apportées par la résolution du problème de PCD-CT.

Deux grandes classes d'approche existent pour résoudre le problème de PCD-CT : les méthodes *Two-Step* ou *One-Step*. Comme le montrent les tableaux bibliographiques de la partie état de l'art, les résultats expérimentaux sont encore peu présents dans la littérature par rapport aux méthodes testées sur données simulées numériquement. La difficulté de la reconstruction PCD-CT réside dans la connaissance de plusieurs paramètres du modèle. En premier lieu, les reconstructions à base de modèle explicite supposent connu le spectre incident $N^0(E)$ de manière suffisamment précise (il faut assez de valeurs en énergie pour décrire la dépendance énergétique de $\mu(E)$). Deuxièmement, le modèle détecteur est aussi supposé connu. Dans la pratique, celui-ci a besoin d'être calibré. Toutes les publications montrant des résultats expérimentaux présentent une étape expérimentale de calibration (cf tableaux bibliographiques II.4, II.5, II.6, II.7, II.8 et II.9).

La spécificité des problèmes de reconstruction tomographique à rayons X est que l'espace dans lequel on optimise est différent de l'espace des mesures (cf figure III.1). Ces espaces de volume et de mesure sont reliés par une opération lourde caractérisée par une matrice : la projection. De plus, alors que dans l'espace d'optimisation on traite des volumes lisses par plage de valeur, les mesures sont naturellement discrètes et bruitées (bruit photonique). Ainsi, il est plus physique de définir un terme de régularisation dans l'espace des volumes, comme dans le cas de reconstructions *One-Step*.

Par rapport aux approches *Two-Step*, un désavantage des approches *One-Step* est l'inversion du modèle direct total. Cette inversion est coûteuse en temps de calcul. De plus, les schémas itératifs en

III.2 Une méthode de reconstruction *One-Step* : le MLTR-ONE-STEP

III.2.1 La paramétrisation de l'objet

Nous faisons dans cette méthode l'hypothèse d'Alvarez [10] de décomposition en base de fonctions. Nous plaçons dans le cas où deux matériaux suffisent pour décomposer le coefficient d'atténuation : pas de matériaux avec un numéro atomique très élevé ou avec une raie K. Plus précisément nous reconstruisons $\mu(E)$ sur une base de deux matériaux (les volumes sont décrits par des indicatrices voxels) :

$$\mu_j(E) = \phi_1(E)f_{1j} + \phi_2(E)f_{2j} \quad (\text{III.1})$$

Le choix des matériaux n'influe pas en théorie sur le résultat à convergence (i.e. sur les cartes d'atténuation $\mu(E)$ recomposées à une certaine énergie à partir des volumes matériau de base). Néanmoins certains choix de combinaison de matériaux peuvent avoir des effets sur la stabilité et la rapidité de convergence. En effet, si les atténuations des matériaux de base choisis sont éloignées (ex : un matériau dur et un matériau mou), l'algorithme convergera plus rapidement en nombre d'itérations [98]. Nous n'implémentons pas ici de méthode de pré-conditionnement (cf sous-partie état de l'art II.2.2) sur la base $(\phi_1; \phi_2)$ mais cela serait une source d'optimisation de la méthode. Le choix des matériaux de base dépend aussi de la connaissance *a priori* de l'objet (gamme d'atténuation des matériaux, présence de matériaux durs tels les os dans le corps humain, injection de produit de contraste ...). Les matériaux de bases seront choisis en fonction du problème et supposés parfaitement connus.

III.2.2 Le modèle direct

Le modèle direct théorique étudié dans ce rapport de thèse repose sur les hypothèses suivantes :

- Le rayonnement diffusé est négligé.
- Le spectre incident $N_i^0(E)$ est supposé connu par pixel. (Si le détecteur est plan et la source ponctuelle, l'angle solide varie légèrement selon les pixels. Cette variation peut être calculée à partir des données géométriques.)
- Le modèle détecteur est linéaire (en particulier il s'agit d'un modèle sans empilement). Il est donc caractérisé par une matrice de réponse DRM .
- La DRM_i est supposée connue et est variable d'un pixel du détecteur à l'autre (en particulier la dépendance énergétique de $DRM_i(c; \cdot)$ est connue).

Le modèle direct s'écrit alors :

$$\overline{m}_i^c(\mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2) = \sum_{E=1}^{N_E} DRM_i(c; E) N_i^0(E) e^{-\phi_1(E)[A\mathbf{f}_1]_i - \phi_2(E)[A\mathbf{f}_2]_i} \quad (\text{III.2})$$

avec A la matrice de projection déterminée par la géométrie d'acquisition. Nous la calculons par l'algorithme de Joseph [58].

En pratique, la réponse du détecteur et le spectre incident utilisés dans la méthode de reconstruction doivent être calibrés (cf sous-partie II.3). Nous choisissons d'écrire le modèle direct théorique en fonction d'un spectre efficace explicite variable par pixel :

$$S_i^{eff}(c; E) = DRM_i(c; E) N_i^0(E) \quad (\text{III.3})$$

Avec cette dernière notation le modèle direct s'écrit :

$$\overline{m}_i^c(\mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2) = \sum_{E=1}^{N_E} S_i^{eff}(c; E) e^{-\phi_1(E)[A\mathbf{f}_1]_i - \phi_2(E)[A\mathbf{f}_2]_i} \quad (\text{III.4})$$

Le nombre de canaux que nous considérons est une variable d'ajustement de la méthode. Nous étudierons son influence dans la partie résultat.

III.2.3 Le modèle statistique

Bien qu'un photon incident puisse être détecté simultanément dans des pixels voisins (à cause du partage de charge) ou simultanément dans plusieurs canaux du même pixel (à cause de la fluorescence par exemple), nous faisons l'hypothèse couramment utilisée que les canaux et les pixels sont indépendants statistiquement. Ainsi nous nous intéressons à chaque pixel i et chaque canal c indépendamment des autres. Nous savons que le bruit photonique est bien représenté par une distribution poissonnienne. Le nombre de photons réels par énergie suit donc une loi de Poisson de paramètre le nombre de photons donné par le modèle direct théorique :

$$N_i^{att_{reel}}(E) \sim \text{Poisson} \left(N_i^0(E) e^{-\phi_1(E)[Af_1]_i - \phi_2(E)[Af_2]_i} \right) \quad (\text{III.5})$$

$N_i^{att_{reel}}(E)$ est le nombre de photons réel atténués après l'objet par énergie E arrivant au pixel i de mesure.

On interprète alors la $DRM_i(c; E)$ comme la probabilité qu'un photon incident à l'énergie E soit détecté dans le canal c . Cela impose que la valeur $DRM_i(c; E)$ soit comprise entre 0 et 1. Si l'on impose sur toutes les énergies $\sum_{c=1}^{N_c} DRM_i(c; E) = 1$, cela signifie qu'un photon est forcément détecté dans un et un seul canal. En pratique, la sensibilité des détecteur à comptage résolu en énergie n'est pas parfaite pour chaque énergie. Un photon peut être détecté dans plusieurs canaux à cause des phénomènes au sein du détecteur (ce qui provoque $\sum_{c=1}^{N_c} DRM_i(c; E) > 1$). Certains photons dans les énergies les plus faibles peuvent aussi ne pas être détectés (ce qui provoque $\sum_{c=1}^{N_c} DRM_i(c; E) < 1$).

Ainsi le nombre de photons à l'énergie E détectés dans le canal c (noté $N_i^c(E)$) suit la loi binomiale de paramètres :

$$N_i^c(E) | N_i^{att_{reel}}(E) \sim \mathcal{B} \left(N_i^{att_{reel}}(E); DRM_i(c; E) \right) \quad (\text{III.6})$$

Cela signifie qu'il y a autant de répétitions que de photons incidents à l'énergie E avec la probabilité de succès $DRM_i(c; E)$. $N_i^c(E)$ est le nombre de photons à l'énergie incidente E détectés dans le canal c .

On utilise alors le lemme (démontré en annexe C) :

$$\text{Si } \begin{cases} X \sim \text{Poisson}(\lambda) \\ Y | X \sim \mathcal{B}(X, p) \end{cases} \quad \text{alors } Y \sim \text{Poisson}(\lambda \times p) \quad (\text{III.7})$$

On applique ce lemme avec :

- $X = N_i^{att_{reel}}(E)$
- $\lambda = N_i^0(E)e^{-\phi_1(E)[Af_1]_i - \phi_2(E)[Af_2]_i}$
- $Y = N_i^c(E)$
- $p = DRM_i(c; E)$ (probabilité de détection)

On obtient ainsi que :

$$N_i^c(E) \sim Poisson\left(\left(N_i^0(E)e^{-\phi_1(E)[Af_1]_i - \phi_2(E)[Af_2]_i}\right) \times (DRM_i(c; E))\right) \quad (III.8)$$

Le nombre de photons mesurés dans un canal dépend de la contribution de toutes les énergies : $m_i^c = \sum_{E=1}^{N_E} N_i^c(E)$. Les photons détectés sont des événements indépendants statistiquement et la loi de Poisson est stable par la somme. Ainsi :

$$m_i^c \sim Poisson\left(\sum_{E=1}^{N_E} S_i^{eff}(c; E)e^{-\phi_1(E)[Af_1]_i - \phi_2(E)[Af_2]_i}\right) \quad (III.9)$$

avec $S_i^{eff}(c; E) = N_i^0(E) DRM_i(c; E)$.

Nous venons de démontrer que si l'on suppose que le nombre de photons atténués suit une loi de Poisson et que la DRM_i est interprétée comme une probabilité de détection, alors la mesure suit toujours un bruit de Poisson :

$$m_i^c \sim Poisson\left(\overline{m}_i^c\right) \quad (III.10)$$

(Cette conclusion est en accord avec les observations expérimentales.)

Ainsi le terme de log-vraisemblance de notre modèle (PL : Poissonian log-likelihood) s'écrit au canal c et au pixel i :

$$PL_i^c(m_i^c; f_1; f_2) = m_i^c \log(\overline{m}_i^c(f_1; f_2)) - \overline{m}_i^c(f_1; f_2) + Cte \quad (III.11)$$

où Cte est un terme indépendant de f_1 et f_2 n'intervenant pas dans la maximisation de la log-vraisemblance.

On suppose les canaux et les pixels statistiquement indépendants. Donc le terme de vraisemblance globale s'écrit :

$$PL(m; f_1; f_2) = \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} \left[m_i^c \log(\overline{m}_i^c(f_1; f_2)) - \overline{m}_i^c(f_1; f_2) \right] \quad (III.12)$$

avec m le vecteur des mesures concaténées : $m = [m_i^c]$ pour $i \in [1, N_p]$ et $c \in [1, N_c]$.

III.2.4 Les termes de régularisation/contraintes

Nous ajoutons ensuite un terme de régularisation pour gérer le bruit et le caractère lisse par plage de valeurs des volumes matériau de base. Il s'agit du cas communément étudié mais ce n'est pas forcément le cas dans toutes les applications. L'ordre de grandeur des contours entre plages de valeurs peut être faible dans le cas de matériaux proches, ou élevés dans d'autres cas. Par exemple une transition tissus mous/os dans le domaine médical est marquée. La régularisation doit respecter ces variations brusques. Les plus petites variations de l'ordre du bruit dans le volume posent

plus de problème. En effet, si l'on régularise trop, on perd de l'information. Par exemple, dans le corps humain, un même organe présente des inhomogénéités de densité provoquant de petites variations au sein du même matériau. Le terme de pénalisation que nous introduisons comporte des paramètres à fixer ; le choix de ces paramètres dépend du contexte (cf partie domaines d'application I.7).

Dans la méthode présentée dans ce manuscrit, nous n'introduisons qu'un terme de lissage spatial. Nous avons identifié dans le chapitre état de l'art d'autres termes de régularisation possibles qui peuvent venir enrichir le modèle.

Nous choisissons comme terme de régularisation une distribution de Gibbs avec fonction de potentiel de Tukey que l'on définit sur chaque volume matériau (indice $b = 1$ ou 2) :

$$R(f_{bj}) = \sum_{\xi=1}^{N_v} w_{j\xi} V^b(f_{bj} - f_{b\xi}) \quad (\text{III.13})$$

où V^b s'exprime en fonction d'un seuil δ_T^b (qui peut être pris différent d'un matériau de base à l'autre) :

$$V^b(t) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \left(\frac{t}{\delta_T^b}\right)^2\right)^3 & \text{si } |t| < \delta_T^b \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Les coefficients $w_{j\xi}$ gèrent le poids associé à chaque voisin. Nous prenons ici l'inverse de la distance euclidienne avec chaque voisin (exprimée en nombre de voxels). Le nombre de voisins pris en compte est un paramètre d'entrée. Donc dans le cas de 4 voisins on a : $w_{j\xi} = 0$ ou 1 ; 8 voisins : $w_{j\xi} = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou 1 ;

La fonction de Tukey a pour avantage d'être deux fois continûment dérivable et de ne pas pénaliser les grandes différences (i.e. les différences entre voxels voisins supérieures au seuil choisi δ_T^b). Cependant, elle est non convexe.

Le terme de régularisation globale s'écrit donc en sommant sur chaque voxel et matériau :

$$R^{global}(f_1; f_2) = \sum_{b=1}^{N_b} \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{\xi=1}^{N_v} w_{j\xi} V^b(f_{bj} - f_{b\xi}) \quad (\text{III.15})$$

où N_b est le nombre de matériau de base ($N_b = 2$ dans notre cas).

La fonction de coût totale de notre problème est donnée par :

$$\Phi(m; f_1; f_2) = PL(m; f_1; f_2) - \beta R^{global}(f_1; f_2) \quad (\text{III.16})$$

où β est un paramètre à choisir qui permet de donner plus ou moins d'influence à la régularisation ("poids de la régularisation").

III.2.5 L'algorithme d'optimisation

Pour résoudre le problème d'optimisation, nous avons choisi d'implémenter un algorithme appelé ML-TR. Il a été introduit [125] dans le cas d'une reconstruction scalaire avec une fonction de coût ne dépendant que d'un volume à reconstruire. Nous rappelons les hypothèses et le schéma itératif associés dans le paragraphe III.2.5.1. Thibaudeau [126] l'a étendu au cas de la reconstruction jointe de deux matériaux de base à partir du spectre en photons atténués : le MLTR-POLY [126].

L'adaptation du ML-TR au cas d'une reconstruction en base de fonction est détaillée dans le paragraphe III.2.5.2. Dans le cadre de notre travail, nous avons modifié le MLTR-POLY pour prendre en compte la distorsion spectrale lors de la mesure via l'ajout d'un modèle détecteur linéaire. Cette étape est décrite dans le paragraphe III.2.5.3. Nous utilisons la même notation Φ dans chaque paragraphe pour désigner la fonction de coût à maximiser. L'expression détaillée de celle-ci dépend cependant du cas étudié.

III.2.5.1 Le ML-TR dans le cas d'une reconstruction scalaire

L'algorithme ML-TR a été introduit par Nuyts en 1997 [125] et la convergence a été démontrée par De Man [3]. Dans le cas d'une reconstruction scalaire, un volume en coefficient d'atténuation μ est reconstruit. Le ML-TR maximise le développement de Taylor à l'ordre 2 calculé à chaque itération en $\mu = \mu^n$.

Le ML-TR repose sur les hypothèses suivantes :

- La fonctionnelle $\Phi(\mu)$ est deux fois continûment dérivable (La matrice hessienne H est donc symétrique).
- Tous les coefficients de la matrice hessienne H sont négatifs.

La j^e coordonnée du gradient de la fonctionnelle est noté $(\nabla\Phi)_{j|_{\mu=\mu^n}}$ et est calculé par l'équation :

$$(\nabla\Phi)_{j|_{\mu=\mu^n}} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_j}(\mu = \mu^n) \quad (\text{III.17})$$

Le coefficient $H_{j\xi}$ de la matrice hessienne de la fonctionnelle est noté $H_{j\xi|_{\mu=\mu^n}}$ et est calculé par l'équation :

$$H_{j\xi|_{\mu=\mu^n}} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu_j\partial\mu_\xi}(\mu = \mu^n) \quad (\text{III.18})$$

Sous ces hypothèses, le schéma itératif (dans le cas d'une reconstruction scalaire) est donné par [3] :

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n - \lambda \frac{(\nabla\Phi)_{j|_{\mu=\mu^n}}}{\sum_{\xi=1}^{N_v} H_{j\xi|_{\mu=\mu^n}}} \quad (\text{III.19})$$

où j et ξ sont des indices de voxel et λ le paramètre de relaxation.

III.2.5.2 Le MLTR-POLY dans le cas d'une reconstruction spectrale sans distorsion spectrale

Nous présentons ici le ML-TR dans le cas d'une reconstruction en base de fonction avec maximum de vraisemblance poissonnienne. Dans ce cas deux volumes matériau f_{1j} et f_{2j} sont reconstruits, ce qui double le nombre d'inconnues ($2 \times N_v$). Ainsi le vecteur gradient est deux fois plus grand et la matrice hessienne a quatre fois plus de coefficients que dans le cas d'une reconstruction scalaire (la taille du volume étant identique).

Cet algorithme a été appelé MLTR-POLY par C. Thibaudau dans sa thèse [126]. Il reconstruit deux volumes en base de fonction à partir du spectre en nombre de photons atténués. C'est à dire qu'il n'y a pas de distorsion spectrale (ou que celle-ci est négligée : la DRM est la matrice identité).

On se place dans le cas de la décomposition en base de fonction à deux matériaux ($N_b = 2$) :

$$\mu_j(E) = f_{1j}\phi_1(E) + f_{2j}\phi_2(E) = \sum_{b=1}^{N_b=2} f_{bj}\phi_b(E) \quad (\text{III.20})$$

Et le nombre de photons atténués théorique au pixel i et à l'énergie E s'écrit :

$$\bar{N}_i^{att}(E) = N_i^0(E) e^{-\phi_1(E)[Af_1]_i - \phi_2(E)[Af_2]_i} \quad (\text{III.21})$$

La log-vraisemblance poissonnienne s'exprime :

$$\Phi(f_1; f_2) = \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{i=1}^{N_p} N_i^{att}(E) \log \left(\bar{N}_i^{att}(E) \right) - \bar{N}_i^{att}(E) \quad (\text{III.22})$$

Avec $N_E > 1$ le nombre d'énergies et $N_i^{att}(E)$ le nombre de photons atténués réels.

Le ML-TR minimise à chaque itération n le développement à l'ordre 2 en série de Taylor de la log-vraisemblance. Celui-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} DLT_2((f_1; f_2); (f_1^n; f_2^n)) &= \Phi(f_1^n; f_2^n) \\ &+ \sum_{b=1}^2 \sum_{j=1}^{N_v} (\nabla \Phi)_{bj}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)} (f_{bj} - f_{bj}^n) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{b=1}^2 \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} H_{bj, a\xi}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)} (f_{bj} - f_{bj}^n) (f_{a\xi} - f_{a\xi}^n) \end{aligned}$$

Avec le gradient $(\nabla \Phi)$ qui est défini par :

$$(\nabla \Phi)_{bj}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)} = \frac{\partial \Phi(f_1; f_2)}{\partial f_{bj}} (f_1 = f_1^n; f_2 = f_2^n) \quad (\text{III.23})$$

et le hessien H par :

$$H_{bj, a\xi}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)} = \frac{\partial^2 \Phi(f_1; f_2)}{\partial f_{bj} \partial f_{a\xi}} (f_1 = f_1^n; f_2 = f_2^n) \quad (\text{III.24})$$

Le ML-TR s'appuie sur l'inégalité remarquable :

$$2AB \leq A^2 + B^2 \quad (\text{III.25})$$

On applique cette inégalité :

$$2(f_{bj} - f_{bj}^n)(f_{a\xi} - f_{a\xi}^n) \leq (f_{bj} - f_{bj}^n)^2 + (f_{a\xi} - f_{a\xi}^n)^2 \quad (\text{III.26})$$

Tous les coefficients $H_{bj, a\xi}$ étant supposés négatifs, on obtient :

$$H_{bj, a\xi}(f_{bj} - f_{bj}^n)(f_{a\xi} - f_{a\xi}^n) \geq H_{bj, a\xi} \left[\frac{(f_{bj} - f_{bj}^n)^2 + (f_{a\xi} - f_{a\xi}^n)^2}{2} \right] \quad (\text{III.27})$$

On somme deux fois sur toutes les inconnues et on sépare :

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^2 \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} H_{bj, a\xi} (f_{bj} - f_{bj}^n) (f_{a\xi} - f_{a\xi}^n) &\geq \\ \sum_{b=1}^2 \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} H_{bj, a\xi} \left[\frac{(f_{bj} - f_{bj}^n)^2}{2} \right] &+ \sum_{b=1}^2 \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} H_{bj, a\xi} \left[\frac{(f_{a\xi} - f_{a\xi}^n)^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Puisque le hessien est symétrique, les deux sommes à droite dans l'inégalité sont identiques et on obtient l'inéquation :

$$\frac{1}{2} \sum_{b=1}^2 \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} H_{bj, a\xi} (f_{bj} - f_{bj}^n) (f_{a\xi} - f_{a\xi}^n) \geq \sum_{b=1}^2 \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} H_{bj, a\xi} \left[\frac{(f_{bj} - f_{bj}^n)^2}{2} \right] \quad (\text{III.28})$$

On introduit :

$$\begin{aligned} T((f_1; f_2); (f_1^n; f_2^n)) &= \Phi(f_1^n; f_2^n) \\ &+ \sum_{b=1}^2 \sum_{j=1}^{N_v} (\nabla \Phi)_{bj}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)} (f_{bj} - f_{bj}^n) \\ &+ \sum_{b=1}^2 \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} H_{bj, a\xi} \left[\frac{(f_{bj} - f_{bj}^n)^2}{2} \right] \end{aligned}$$

La définition de T et l'inéquation III.28 nous assurent les propriétés nécessaires pour que T soit une fonction de substitution (cf. paragraphe II.1.3.5 du chapitre état de l'art) :

- $\Phi(f_1^n; f_2^n) = DLT_2((f_1^n; f_2^n); (f_1^n; f_2^n)) = T((f_1^n; f_2^n); (f_1^n; f_2^n))$
- $\forall (f_1; f_2) \quad DLT_2((f_1; f_2); (f_1^n; f_2^n)) \geq T((f_1; f_2); (f_1^n; f_2^n))$
- T peut être maximisée de façon analytique (démontré dans la suite)

Pour cette dernière assertion, nous avons :

$$T((f_1; f_2); (f_1^n; f_2^n)) = \text{constante} + \sum_{b=1}^2 \sum_{j=1}^{N_v} t_{bj}(f_{bj}) \quad (\text{III.29})$$

Qui est une somme de paraboles concaves $t_{bj}(f_{bj})$ qui ne dépendent que de f_{bj} . On peut donc maximiser indépendamment selon chaque f_{bj} :

$$\frac{\partial T}{\partial f_{bj}} = (\nabla \Phi)_{bj}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)} + \sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} H_{bj, a\xi}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)} (f_{bj} - f_{bj}^n) \quad (\text{III.30})$$

$$\frac{\partial T}{\partial f_{bj}}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)} (f_1^{n+1}; f_2^{n+1}) = 0 \Leftrightarrow f_{bj}^{n+1} = f_{bj}^n - \frac{(\nabla \Phi)_{bj}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)}}{\sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} H_{bj, a\xi}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)}} \quad (\text{III.31})$$

Ceci est le cas général dans le cas d'une reconstruction de deux volumes de base. Dans le cas de la log-vraisemblance poissonnienne sans distorsion spectrale, le calcul du gradient donne :

$$(\nabla \Phi)_{bj}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)} = - \sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} \left[N_i^{att}(E) - \bar{N}_i^{att}(E) \right] \quad (\text{III.32})$$

Et le hessien :

$$H_{bj, a\xi}|_{(f_1; f_2)=(f_1^n; f_2^n)} = - \sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) \phi_a(E) \left[\sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} A_{i\xi} \bar{N}_i^{att}(E) \right] \quad (\text{III.33})$$

(On a bien un hessien symétrique (au sens où $H_{bj, a\xi} = H_{a\xi, bj}$) avec des coefficients négatifs.)

Le schéma itératif du MLTR-POLY s'exprime ainsi sous la forme :

$$f_{bj}^{n+1} = f_{bj}^n - \frac{\sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} \left[N_i^{att}(E) - \bar{N}_i^{att}(E) \right]}{\sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} \sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) \phi_a(E) \left[\sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} A_{i\xi} \bar{N}_i^{att}(E) \right]} \quad (\text{III.34})$$

Cette équation de mise à jour diffère de celle présentée par C. Thibaudeau dans le manuscrit de sa thèse [126]. La somme du dénominateur indiquée par a porte sur les deux volumes reconstruits. Il s'agit d'une application plus rigoureuse du ML-TR.

III.2.5.3 MLTR-ONE-STEP dans le cas d'une reconstruction spectrale avec distorsion spectrale linéaire

Nous présentons maintenant l'adaptation du MLTR-POLY au cas d'une reconstruction avec distorsion spectrale linéaire. La solution de ce problème est obtenue par la résolution de :

$$(f_1^*; f_2^*) = \arg \left\{ \max_{(f_1; f_2)} \left[\Phi(m; f_1; f_2) \right] \right\} \quad (\text{III.35})$$

avec la fonction de coût Φ qui s'écrit (en insérant les équation III.12 et III.15) :

$$\begin{aligned} \Phi(m; \mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2) = & \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} \left[m_i^c \log(\overline{m}_i^c(\mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2)) - \overline{m}_i^c(\mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2) \right] \\ & - \beta \sum_{b=1}^{N_b} \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{\xi=1}^{N_v} w_{j\xi} V^b(\mathbf{f}_{bj} - \mathbf{f}_{b\xi}) \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

L'équation de mise à jour III.31 démontrée dans le cas du MLTR-POLY reste vraie. Le schéma itératif est différent selon chaque volume matériau. Il s'écrit pour le volume matériau b pour le voxel j (voir démonstration de l'équation III.31) :

$$f_{bj}^{n+1} = f_{bj}^n - \lambda \frac{(\nabla \Phi)_j|_{(f_1=f_1^n; f_2=f_2^n)}}{\sum_{a=1}^2 \sum_{\xi=1}^{N_v} H_{bj, a\xi}|_{(f_1=f_1^n; f_2=f_2^n)}} \quad (\text{III.37})$$

Néanmoins les termes de gradient et de hessien doivent être adaptés au cas d'une reconstruction *One-Step*.

Pour cela, nous notons :

$$\text{att}_i(E; f_1; f_2) = \phi_1(E)[Af_1]_i + \phi_2(E)[Af_2]_i = \sum_{b=1}^2 \phi_b(E)[Af_b]_i \quad (\text{III.38})$$

$$B_i^{cE}(f_1; f_2) = S_i^{eff}(c; E) e^{-\text{att}_i(E; f_1; f_2)} \quad (\text{III.39})$$

Nous calculons donc le gradient de la fonctionnelle Φ par rapport à un f_{bj} donné :

$$(\nabla \Phi)_{bj} = \frac{\partial \Phi(m; \mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2)}{\partial f_{bj}}(f_1 = f_1^n; f_2 = f_2^n) \quad (\text{III.40})$$

Soit (les détails des calculs sont présentés dans l'annexe D.1) :

$$(\nabla \Phi)_{bj} = \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{E=1}^{N_E} A_{ij} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) \left[1 - \frac{m_i^c}{\overline{m}_i^c(f_1; f_2)} \right] - \beta \sum_{\xi=1}^{N_v} w_{j\xi} V^{b'}(f_{bj} - f_{b\xi}) \quad (\text{III.41})$$

Le calcul du hessien se fait quant à lui pour un f_{bj} et $f_{a\xi}$ donnés :

$$H_{bj,a\xi} = \frac{\partial^2 \Phi(m; f_1; f_2)}{\partial f_{bj} \partial f_{a\xi}} (f_1 = f_1^n; f_2 = f_2^n) \quad (\text{III.42})$$

Soit (les détails des calculs sont présentés dans l'annexe D.2) :

$$H_{bj,a\xi} = - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} A_{ik} h_{c,i}^{a,b} - \mathbf{1}_{\left\{ \begin{smallmatrix} a \\ j \end{smallmatrix} \equiv \begin{smallmatrix} b \\ \xi \end{smallmatrix} \right\}} \beta \sum_{\xi=1}^{N_v} w_{j\xi} V^{b''} (f_{bj} - f_{b\xi}) \quad (\text{III.43})$$

avec :

$$h_{c,i}^{a,b} = \sum_{E=1}^{N_E} \phi_a(E) \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) \left[1 - \frac{m_i^c}{\left(\overline{m}_i^c(f_1; f_2) \right)^2} \sum_{E'=1}^{E-1} B_i^{cE'}(f_1; f_2) \left[\frac{\phi_a(E')}{\phi_a(E)} - 1 \right] \left[\frac{\phi_b(E')}{\phi_b(E)} - 1 \right] \right]$$

Ce dernier terme met en lumière la difficulté du problème de PCD-CT. Le coefficient hessien ci-dessus trivialement négatif dans le cas du MLTR-POLY [126] ne l'est plus immédiatement ici. La négativité de ce terme n'est pas démontrée. Néanmoins elle a toujours été observée et vérifiée en pratique à chaque mise à jour du volume.

Le schéma algorithmique III.37 donne en détail :

$$f_{bj}^{n+1} = f_{bj}^n + \lambda \frac{\sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{E=1}^{N_E} A_{ij} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) \left[1 - \frac{m_i^c}{\overline{m}_i^c(f_1; f_2)} \right] - \beta \sum_{\xi=1}^{N_v} w_{j\xi} V^{b'}(f_{bj} - f_{b\xi})}{\sum_{a=1}^2 \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} \left(\sum_{\xi=1}^{N_v} A_{ik} \right) h_{c,i}^{a,b} + \beta \sum_{\xi=1}^{N_v} w_{j\xi} V^{b''}(f_{bj} - f_{b\xi})} \quad (\text{III.44})$$

avec le terme $h_{c,i}^{a,b}$ explicité ci-dessus.

Le schéma itératif est assez lourd car il comporte des sommes sur toutes les énergies incidentes calculées à chaque pixel et chaque canal. Cependant, il peut être parallélisé sur les pixels et les canaux.

III.3 Implémentation

L'avantage du MLTR-ONE-STEP est qu'il est facile de démontrer qu'il reste convergent même en modifiant le mode de mise à jour (nombre de voxels modifiés et nombre de pixels/canaux pris en compte à chaque mise à jour). Dans la version que nous avons implémentée, tous les voxels sont mis à jour à chaque application du schéma itératif : mode synchrone. Les pixels ne sont pris en compte que partiellement à chaque mise à jour avec la technique OS (Ordered Subset). Pour diviser les pixels en sous-groupe, on tire au hasard des angles de vues et on prend en compte la totalité des pixels de mesure de ces angles de vues. Cette prise en compte aléatoire permet une accélération de la convergence. Pour qu'une itération soit complète, chaque angle de vue doit avoir été pris en compte une et une seule fois. Les coefficients de la matrice de projection A sont recalculés à chaque prise en compte d'un angle de vue (le stockage de A est trop coûteux). Pour cela, nous utilisons l'algorithme de Joseph (implémentation "Ray-driven").

Nous résumons ci-dessous la liste des données nécessaires en entrée de la méthode MLTR-ONE-STEP et la liste des paramètres à définir.

Liste des données en entrée de la méthode :

- Les mesures : $\{m_i^c\}_{i \in [1; N_p], c \in [1; N_c]}$.
- Le spectre efficace : $\{S_i^{eff}(c; E)\}_{i \in [1; N_p], c \in [1; N_c], E \in [1; N_E]}$.
- La géométrie d'acquisition (nécessaire au calcul de A).

Liste des paramètres à fixer :

- Les matériaux de bases $\phi_1(E)$ et $\phi_2(E)$.
- Le nombre de sous-groupes de pixels (nombre d'angles de vue par subset).
- Le paramètre de relaxation λ (dépend du paramètre précédent).
- Le poids β de la régularisation.
- Les seuils δ_T^b , paramètres de la fonction de potentiel de Tukey.
- Le nombre de voisins pris en compte pour calculer le terme de régularisation (choix de $w_{j\xi}$).
- Le nombre et les bornes des canaux.

Etat initial :

A cause des propriétés de convexité de la fonction de coût et pour des raisons de rapidité de convergence, les volumes de matériaux de base pris comme état initial sont d'une grande importance. Ceux-ci doivent déjà s'approcher d'un résultat convenable [39]. Des méthodes de reconstruction *Two-Step* simples permettent d'obtenir en peu de temps de calcul des volumes de matériaux adéquats.

III.4 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une méthode de reconstruction *One-Step* pour résoudre le problème de PCD-CT. Cette méthode reconstruit deux volumes en matériaux de base en même temps qu'elle inverse un modèle détecteur linéaire explicite en maximisant la log-vraisemblance poissonnienne du modèle. Nous formulons le modèle statistique en interprétant la DRM_i comme une probabilité au sein du détecteur. Un terme de régularisation robuste (fonction de Tukey) est ajouté pour lisser spatialement les volumes matériaux de base. Les paramètres du terme de pénalisation sont à fixer selon le domaine d'application et la connaissance *a priori* sur l'objet.

Nous implémentons un mode de prise en compte des données de manière "ordered-subset" pour accélérer la convergence. La vitesse de convergence dépend de paramètres fixés en entrée de reconstruction qui sont sujets à optimisation. L'implémentation de cette méthode est réalisée de façon standard : volume décrit par des indicatrices voxel, calcul de A par l'algorithme de Joseph et une mise à jour synchrone (tous les voxels mis à jour).

Notre contribution à cette méthode est l'adaptation du ML-TR au cas de la reconstruction à partir des mesures brutes. Thibaut [126] avait développé une méthode MLTR-POLY pour une reconstruction jointe sans régularisation ni prise en compte de la distorsion spectrale. Nous avons fait évoluer l'algorithme pour le cas PCD-CT avec terme de régularisation et modèle de détecteur explicite. La régularisation par définition d'une distribution de Gibbs est beaucoup utilisée dans la littérature. L'utilisation de la fonction de Tukey comme fonction de potentiel est par contre moins courante [50].

La description du comportement spectral du modèle direct dans notre méthode permet de réduire les artéfacts dus au durcissement de spectre. Une approche *One-Step* et un terme de régularisation spatiale permettent d'appréhender les niveaux de bruits tels ceux observés dans le cas d'un scanner médical. D'autre part, l'ajout d'un terme de régularisation peut avoir un effet bénéfique sur la rapidité de convergence.

Les résultats obtenus sur des données issues de simulations numériques sont décrits dans le chapitre 4. L'application de la reconstruction MLTR-ONE-STEP à des données expérimentales fait l'objet du chapitre 5.

Chapitre IV

Reconstruction MLTR-ONE-STEP à partir de données simulées

Dans ce chapitre, nous montrons les résultats obtenus à partir de simulations numériques sur des fantômes simples. Ces fantômes visent à valider la méthode MLTR-ONE-STEP et à étudier le comportement de la décomposition en matériaux lors de la reconstruction. Nous étudions l'influence des paramètres de la régularisation. Nous cherchons à identifier les limites de la méthode.

IV.1 Etude d'un cylindre avec 6 inserts de matériaux différents

IV.1.1 Présentation du cas d'étude

Nous considérons dans cette première partie l'objet de la figure IV.1. Il s'agit d'un cylindre de 30 cm de diamètre en eau avec 6 inserts de 5 cm de diamètre de matériaux différents. Parmi ces matériaux, trois sont des matériaux durs : l'aluminium, l'os cortical et l'os compact (un type d'os moins atténuant que l'os cortical) et trois matériaux sont mous et proches : le tissu adipeux, le polyéthylène et le plexiglas. On ne considère qu'une tranche du cylindre.

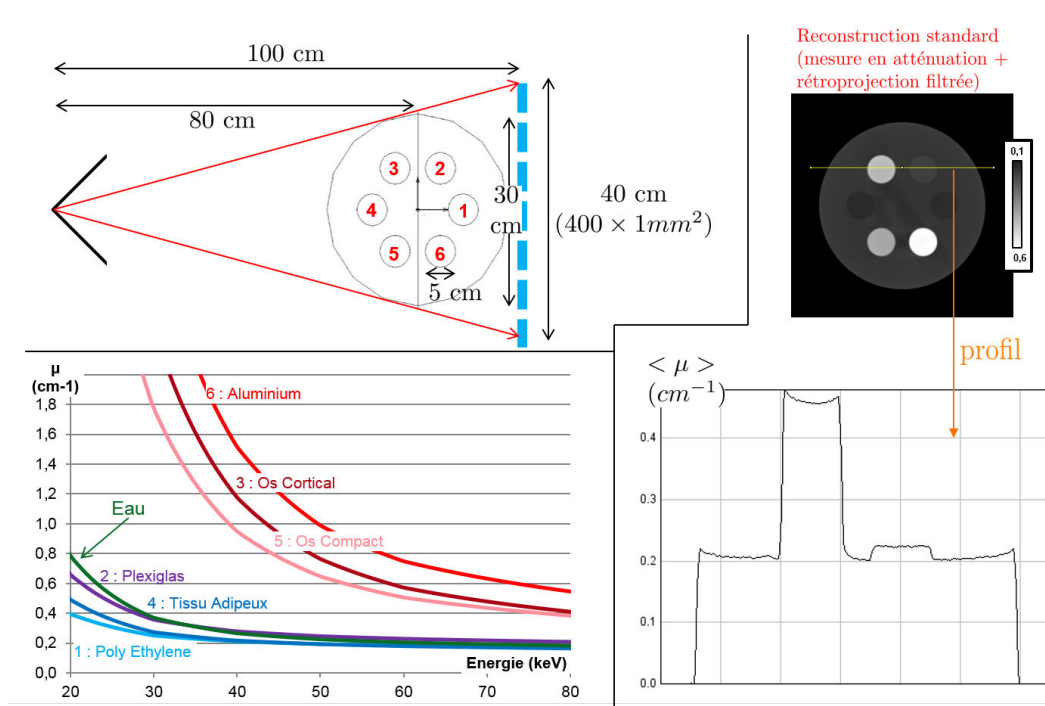


FIGURE IV.1 – Présentation de l'objet étudié et des matériaux présents. En haut à gauche : géométrie de l'objet et de l'acquisition. En bas à gauche : coefficients d'atténuation des matériaux présents. A droite : reconstruction standard de type rétro-projection filtrée à partir de mesures en atténuation non bruitées.

Pour l'acquisition tomographique, 360 angles de vues ont été simulés à l'aide du logiciel Sindbad [127] avec un détecteur d'une ligne de 400 pixels (de taille $1 \times 1 \text{ mm}$) : donc $N_p = 400 \times 360 = 144000$. Le centre de l'objet est positionné à 80 cm de la source et le détecteur à 100 cm de la source. Ainsi le cylindre est vu dans son intégralité pour chaque angle de vue.

Les mesures sont effectuées avec une source avec une anode en tungstène et une tension de 140 kV avec 0.1 cm de filtrage d'aluminium en sortie de la source. La durée de mesure est 0.1 s avec 10 mA d'intensité. Ces paramètres géométriques et de la source résultent en un plein flux de 5.10^7 photons par pixel au centre du détecteur. Ces valeurs de dose de rayons X sont supérieures à celle rencontrées dans la littérature. Le plein flux est considéré de l'ordre de 1.10^6 photons pour une taille de pixel équivalente [98]. Néanmoins notre objet est de taille importante (30 cm de diamètre) : au pixel le plus atténué, le nombre de photons atténués est d'environ 400. Dans le cas de données bruitées, un bruit de Poisson est simulé en chaque pixel et chaque canal.

Nous cherchons à reconstruire ce volume en le décomposant en eau et en os cortical (le résultat théorique est affiché dans l'image IV.2). L'aluminium étant un matériau très atténuant, sa décomposition montre une certaine variabilité selon la gamme énergétique étudiée. Pour obtenir le résultat théorique, nous avons minimisé l'erreur quadratique entre les coefficients d'atténuation des matériaux et leur décomposition sur les matériaux eau/os cortical. Dans le cas de l'aluminium, ce problème s'écrit :

$$(f_1^{theo}; f_2^{theo}) = \arg \left\{ \min_{(f_1; f_2)} \left[\left\| \mu_{Alu.}(E) - (\phi_{Os\ c.}(E)f_1 + \phi_{Eau}(E)f_2) \right\|_2 \right] \right\} \quad (IV.1)$$

La pondération énergétique causée par le spectre incident peut provoquer une légère modification par rapport au résultat théorique.

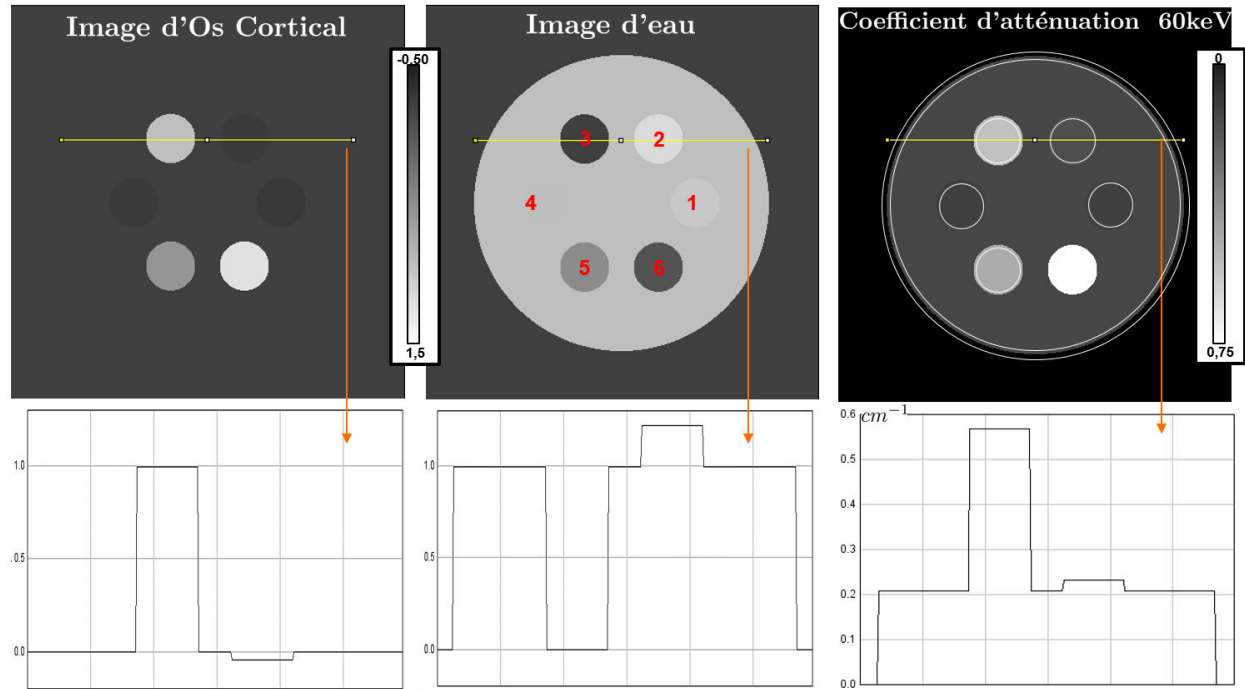


FIGURE IV.2 – Décomposition théorique de l'objet étudié. Position des inserts : 1 : Polyéthylène ; 2 : Plexiglas ; 3 : Os cortical ; 4 : Tissu adipeux ; 5 : Os compact ; 6 : Aluminium. Sur la carte de coefficient d'atténuation, les 8 frontières des zones d'intérêt ROIs sont dessinées.

Le volume en coefficient d'atténuation (auss appelé image virtuelle monochromatique) est obtenu en recombinaison des volumes en eau et en os cortical à l'énergie 60 keV.

$$\mu(60keV) = \phi_{Eau}(60keV)f_{Eau} + \phi_{Os\ c.}(60keV)f_{Os\ c.} \quad (IV.2)$$

Nous choisissons une taille de voxel de $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}$ et le volume contient $N_v = 400 \times 400$ voxels. (Ainsi la taille de la matrice de projection théorique est N_p lignes \times N_p colonnes = 160000×144000 coefficients). La géométrie de l'acquisition est donc bien conditionnée. De plus, dans toutes les méthodes présentées dans ce chapitre, nous imposons une contrainte de support : les volumes sont pris nuls en dehors d'un cercle de 33 cm de diamètre centrée sur l'axe de rotation du système.

Le détecteur est simulé à l'aide d'une *DRM* représentant les phénomènes de partage de charge et de partage d'induction pour un détecteur barrette à base de CdTe (3 mm d'épaisseur). Dans ce contexte et dans un premier temps, nous considérons 2 canaux de bornes : $[15 - 65 \text{ keV}]$ et $[66 - 115 \text{ keV}]$. Deux canaux suffisent mathématiquement pour inverser et reconstruire deux volumes en matériau de base. Néanmoins cela peut rendre instable l'inversion du modèle détecteur, en particulier si celui-ci n'est pas parfaitement connu. Nous étudions l'influence du nombre de canaux dans la sous-partie IV.4. Les autres paramètres de la méthode MLTR-ONE-STEP (paramètres de la régularisation, de mise à jour...) varient selon le cas présenté.

Pour analyser les images obtenues, nous définissons des ROIs (Régions d'intérêts : "*Regions Of Interest*"). Nous en considérons 8 : 6 à l'intérieur des inserts matériaux, une à l'intérieur du cylindre en eau et une à l'extérieur dans l'air. Les ROI ne prennent pas en compte les voxels à la frontière entre deux matériaux, ils sont rognés. Les ROIs sont dessinées sur la figure IV.2.

IV.1.2 Etat initial : utilisation d'une méthode *Two-Step* standard

Les volumes sont initialisés avec une méthode *Two-Step* décomposant les deux sinogrammes en atténuation mesurés en longueur matériau de base par une fonction de polynomiale d'ordre 2 apprise sur une base de calibration. Un polynôme d'ordre deux est calculé pour chaque matériau sur une base de calibration couvrant toute la gamme d'atténuation. Cette méthode est une méthode rapide et utilisée de façon standard en tomographie à rayons X bi-énergie. Les résultats en volume matériau sont affichés dans la figure IV.3 et la carte $(f_1; f_2)$ obtenue dans la figure IV.4.

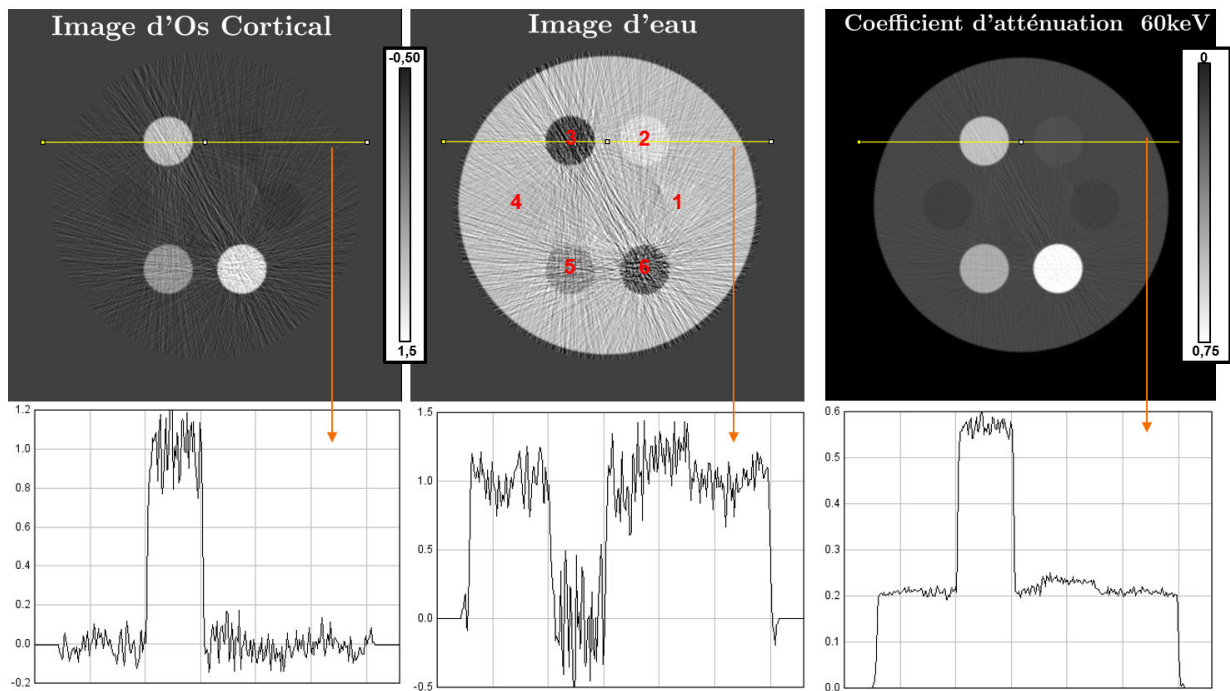


FIGURE IV.3 – Reconstruction de l'objet étudié par méthode *Two-Step* polynomiale standard. Position des inserts : 1 : Polyéthylène ; 2 : Plexiglas ; 3 : Os cortical ; 4 : Tissu adipeux ; 5 : Os compact ; 6 : Aluminium.

Un critère utilisé pour évaluer le résultat de la reconstruction est le biais, défini comme la différence entre la valeur moyenne dans une ROI et la valeur théorique des voxels de cette ROI. Dans le résultat IV.4, il est en moyenne de 10%. De plus, le bruit observé est assez important dans les volumes matériaux. Ceci s'explique par le fait que la décomposition polynomiale augmente le bruit : les sinogrammes en longueurs de matériaux sont plus bruités que les sinogrammes mesurés.

On observe sur la carte $(f_1; f_2)$ que les nuages s'organisent en forme allongée et montrent une corrélation forte dans chaque matériau (cf sous-partie II.2.4 de l'état de l'art). A titre de comparaison, on peut se référer à la forme des nuages obtenue dans le cas de deux volumes bruités non corrélés (figure I.26). Nous nous intéressons à la pente d'une droite suivant la forme allongée. On peut écrire la décomposition en base de matériaux sous la forme :

$$f_2 = -\frac{\phi_1(E)}{\phi_2(E)} f_1 + \frac{\mu(E)}{\phi_2(E)} \quad (\text{IV.3})$$

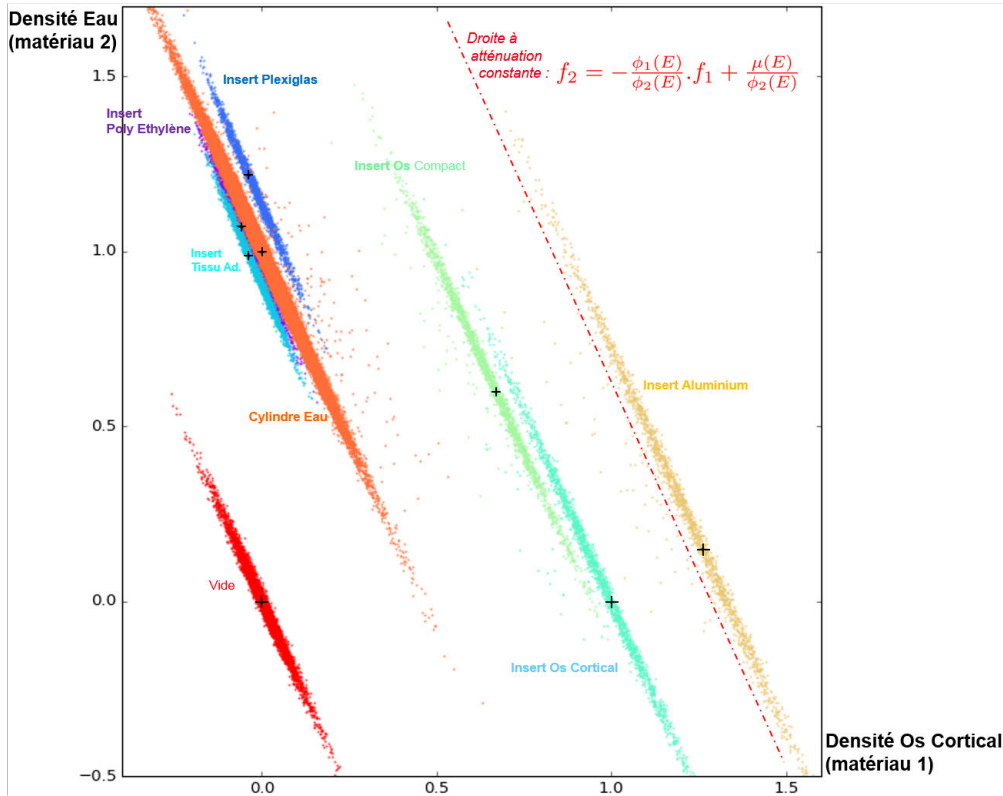


FIGURE IV.4 – Carte $(f_1; f_2)$ pour le cas de la reconstruction *Two-Step* polynomiale standard. Les '+' affichés sur la carte sont les valeurs vraies attendues pour chaque matériau.

Dans notre cas, le spectre atténué a une énergie moyenne de l'ordre de 80keV. Si l'on exprime la droite ci-dessus pour cette énergie, on obtient une droite qui s'aligne avec la forme de l'insert, droite dite à atténuation constante. Par contre, l'image virtuelle est moins bruitée. En effet, cette image est calculée par utilisation de l'équation IV.2 qui s'approche de la relation de covariance entre les volumes matériau de base. Le bruit dans l'image virtuelle dépend de l'énergie pour laquelle elle est calculée. Il est minimal autour de 80keV.

L'état initial présenté dans ce paragraphe permet au MLTR-ONE-STEP d'être déjà proche de la solution finale. Il présente un aspect assez bruité modifiable en appliquant des filtres spatiaux (provoquer une légère perte d'information n'est pas dommageable pour cet état initial proche).

IV.1.3 Reconstruction sans régularisation

Dans un premier temps, nous cherchons à reconstruire les données non bruitées pour valider la méthode. Nous ne considérons pas de régularisation spatiale, l'objectif est l'optimisation du critère du maximum de vraisemblance poissonnienne. Le résultat est affiché sur la figure IV.5. La reconstruction a été initialisée avec la reconstruction *Two-Step* polynômial standard illustrée dans la sous-partie précédente exécutée sur des données non bruitées.

Nous observons qu'aux erreurs de discrétisation près, les volumes matériaux sont parfaitement reconstruits. Le nombre d'itérations est élevé (1000 itérations) pour atteindre le résultat à convergence. Le bruit résiduel vient de la discrétisation du volume (il peut être pertinent d'appliquer un filtre faisant la moyenne sur les 9 voxels voisins pour rendre compte de la modélisation discrète du volume par des voxels). Grâce à la description de l'aspect spectral de la mesure, aucun artéfact marqué n'est présent dans l'image (contrairement à la figure IV.1). Ce résultat valide le fonctionnement de la méthode et la convergence de l'algorithme.

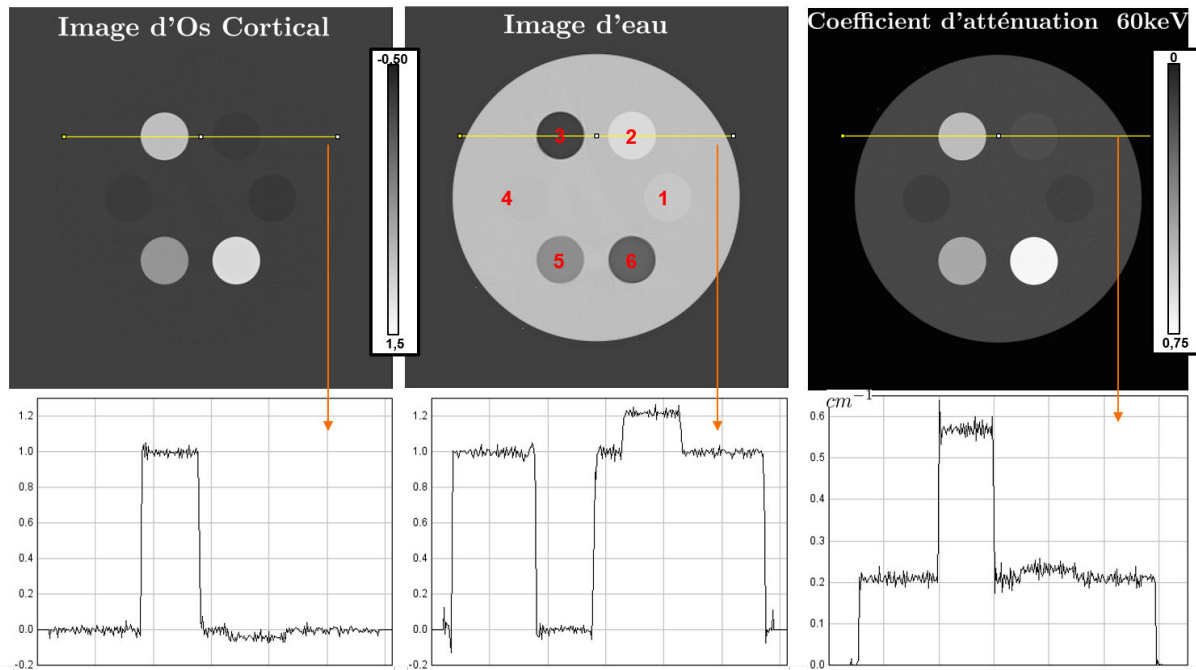


FIGURE IV.5 – Résultat de la reconstruction à partir des données non bruitées et volumes initialisés, $\lambda = 0.75$, 1 angle de vue par subset soit 360 subsets, 1000 itérations, pas de régularisation. Position des inserts : 1 : Polyéthylène ; 2 : Plexiglas ; 3 : Os cortical ; 4 : Tissu adipeux ; 5 : Os compact ; 6 : Aluminium.

Nous réalisons la même reconstruction sur des données bruitées (cf figure IV.6). La reconstruction divergeant en présence de bruit et en l'absence de régularisation, la reconstruction est arrêtée au bout de 500 itérations.

Une étude sur les ROIs de l'image IV.6 montre que le bruit n'entraîne pas de biais de manière globale dans les ROIs (1% d'erreur par rapport à la valeur vraie). Cependant si l'on considère l'erreur quadratique $\sum_{j=i}^{N_v} \left(\frac{f_{bj} - f_{bj}^{vraie}}{f_{bj}^{vraie}} \right)^2$, celle-ci est plus élevée que dans le cas de données non bruitées.

On observe que le bruit est plus important dans les volumes matériaux que dans l'image virtuelle. De manière analogue à la reconstruction utilisée en état initial, ceci est l'expression de la corrélation entre les volumes matériau de base. L'effet du bruit montre l'importance d'ajouter un terme de régularisation dans le cas de données réalistes.

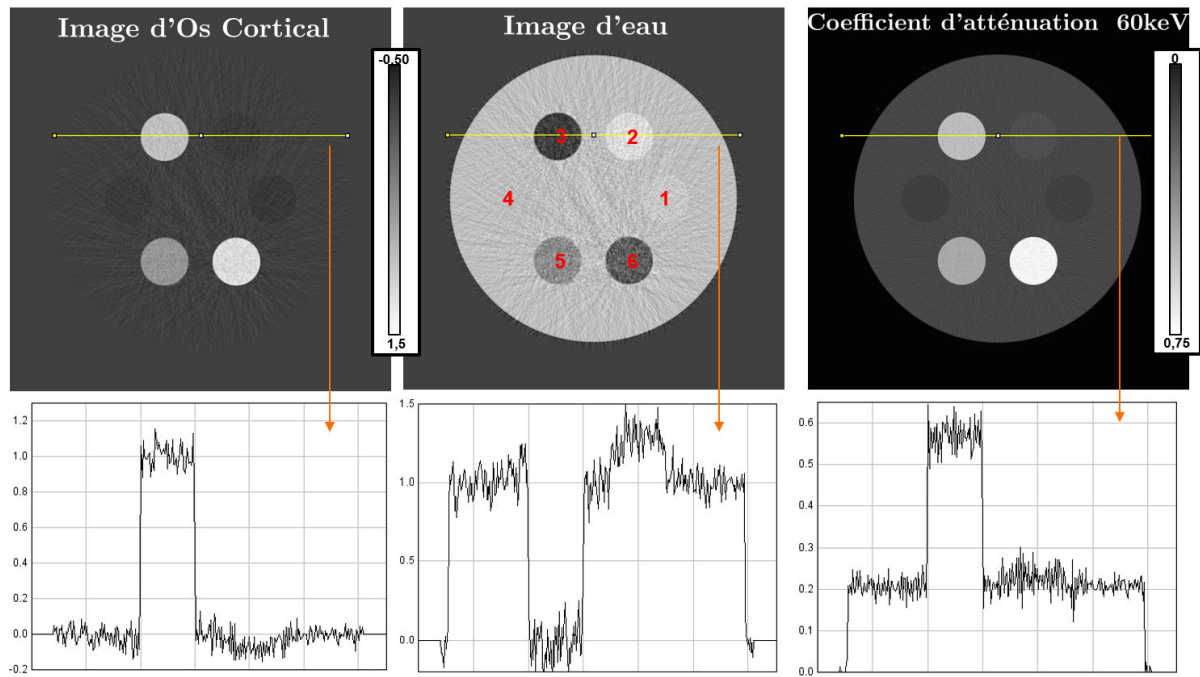


FIGURE IV.6 – Résultat du MLTR-ONE-STEP à partir des données bruitées sans régularisation et volumes initialisés, $\lambda = 0.75$, 1 angle de vue (360 subsets), 500 iter., pas de régularisation. Position des inserts : 1 : Polyéthylène ; 2 : Plexiglas ; 3 : Os cortical ; 4 : Tissu adipeux ; 5 : Os compact ; 6 : Aluminium.

IV.1.4 Reconstruction avec régularisation

Dans cette partie nous montrons l'effet d'un terme de régularisation. Les deux paramètres à fixer sont le poids de la régularisation β et le seuil de la fonction de Tukey δ_T^b . Le choix de ces paramètres est important, l'influence de leur variation est illustrée dans la partie suivante. Dans le résultat de la figure IV.7, ils sont fixés à $\beta = 0.05$ et $\delta_T = 0.1$ (identique pour les deux matériaux).

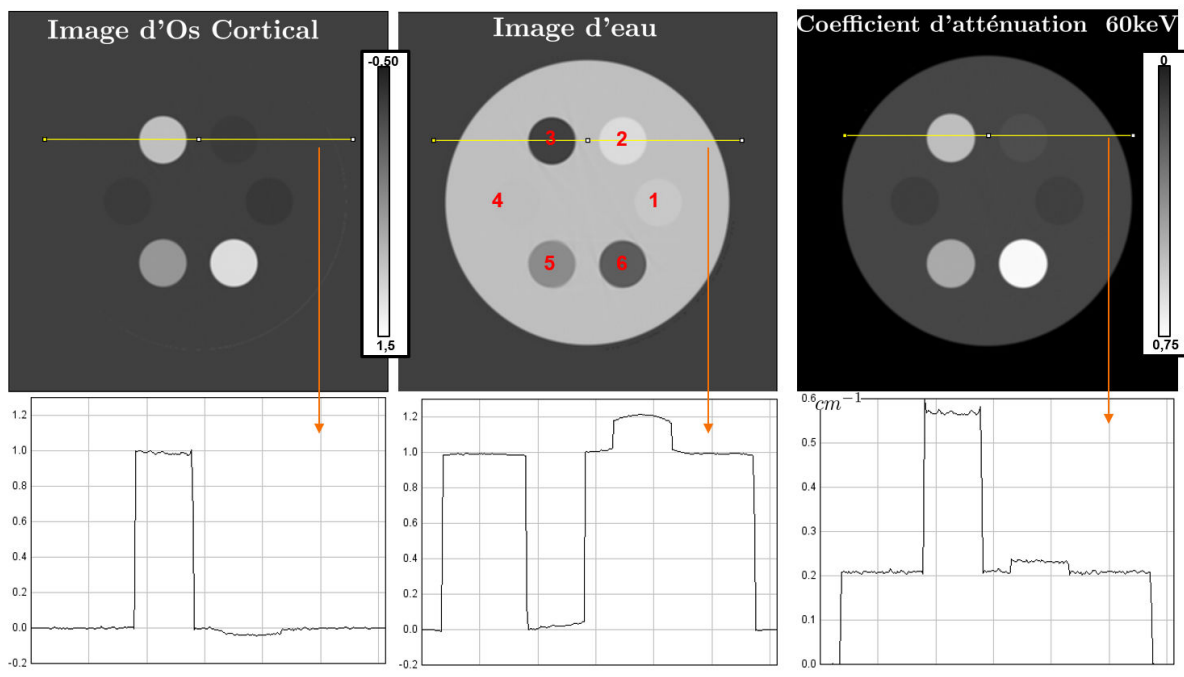


FIGURE IV.7 – Résultat du MLTR-ONE-STEP à partir des données bruitées avec régularisation et volumes initialisés, $\lambda = 0.5$, 1 angle de vue (360 subsets), 500 itérations, $\beta = 0.05$ et $\delta_T = 0.1$. Position des inserts : 1 : Polyéthylène ; 2 : Plexiglas ; 3 : Os cortical ; 4 : Tissu adipeux ; 5 : Os compact ; 6 : Aluminium.

Il est à noter que la valeur de la pénalisation commence à baisser lorsque la différence entre valeur de voxel est plus élevée que $\frac{\delta_T}{2}$. (La mise à jour dépend de la dérivée de la fonction de Tukey qui est croissante de 0 à $\frac{\delta_T}{2}$ puis décroissante jusqu'à δ_T). Pour compenser l'ajout d'un terme de régularisation dans le schéma itératif de l'algorithme (cf équation III.37), la valeur du coefficient de relaxation λ doit être adaptée : nous choisissons maintenant $\lambda = 0.5$. Les résultats sont initialisés avec la reconstruction *Two-Step* standard illustrée dans la partie IV.1.2.

Par comparaison avec les résultats sans régularisation, on voit que la régularisation permet à la fois de gérer le bruit photonique et le bruit résiduel du à la discrétisation du volume. Cependant, entre les matériaux du volume dont la densité en matériau est proche, la régularisation a tendance à lisser le saut de valeur. Cela est observé dans le profil tracé dans le volume en Os Cortical de la figure IV.7.

IV.1.5 Comparaison des cartes $(f_1; f_2)$ avec et sans régularisation

Pour illustrer l'apport du terme de régularisation, nous traçons dans la figure IV.8 les cartes $(f_1; f_2)$ des deux reconstructions sur données bruitées montrées dans les deux-sous-parties précédentes. (Les voxels frontières sont rognés et non affichés : cf annexe E pour la carte avec voxels frontières).

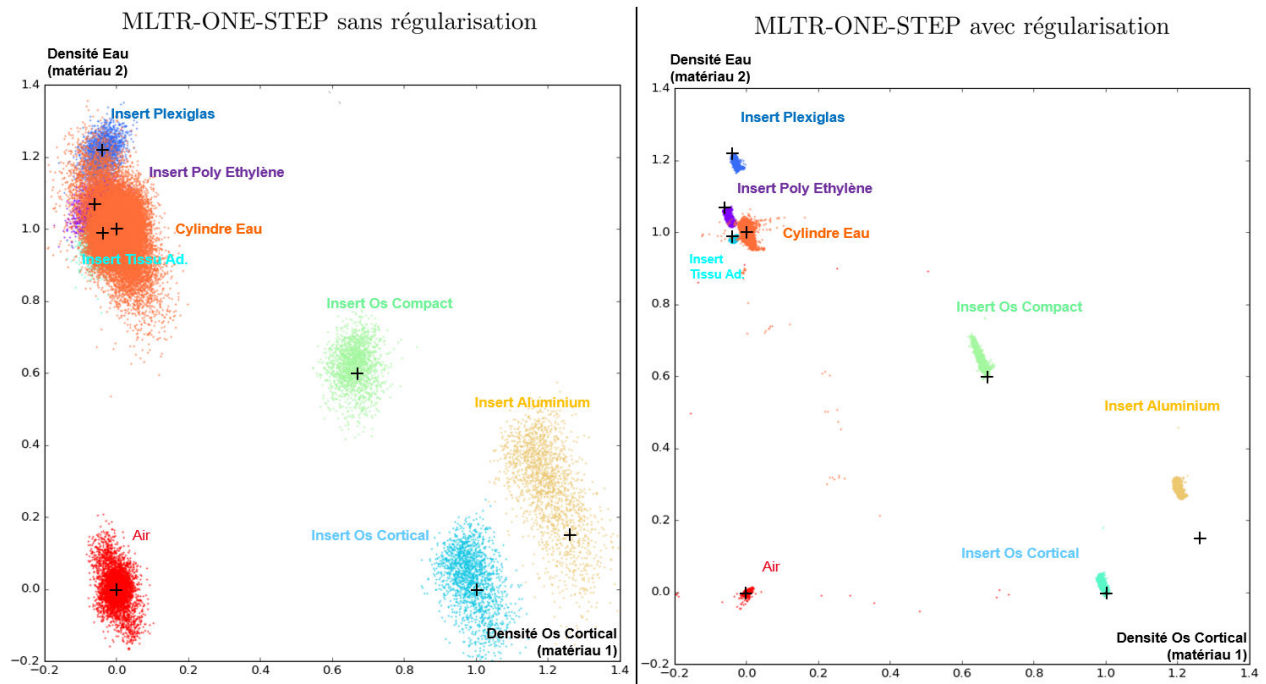


FIGURE IV.8 – Comparaison des cartes $(f_1; f_2)$ pour le cas de reconstruction sur données bruitées sans terme de régularisation (à gauche) et avec (à droite). Les '+' affichés sur chaque carte sont les valeurs vraies attendues pour chaque matériau.

Nous observons que la régularisation a tendance à regrouper les voxels d'un même matériau et à permettre de gérer le bruit dans les volumes reconstruits. Dans le résultat de la figure IV.8, les paramètres de la régularisation ont été fixés de manière optimisée. Nous reviendrons sur l'influence des paramètres dans la partie suivante. Certains matériaux non différenciables dans le cas sans régularisation (comme par exemple le polyéthylène et le tissu adipeux) le deviennent grâce à la régularisation. La forme des nuages des différents inserts dépend de plusieurs causes comme la différence de densité entre matériaux voisins (i.e. le fait que les inserts soient entourés d'eau) ou l'aspect de l'état initial. Ces deux causes rendent les nuages plus ou moins allongés.

IV.1.6 Comparaison avec une méthode *Two-Step* standard par zone

Afin de montrer l'apport de la stratégie *One-Step*, nous comparons les résultats avec une méthode *Two-Step* rapide et simple : une méthode de décomposition polynomiale par zone. Pour décomposer les sinogrammes, nous utilisons une fonction de calibration polynômiale d'ordre 2 définie par zone. La méthode standard présentée dans la partie IV.1.2 (et utilisée comme état initial précédemment) ne calcule qu'un seul polynôme pour toute la gamme d'atténuation. Cela induit un biais pour les valeurs les plus extrêmes, en particulier dans le cas de larges gammes atténuation.

Pour améliorer cette méthode, la gamme d'atténuation est divisée en 16 zones. Pour chaque zone est calculé un polynôme d'ordre 2. Ceci permet d'améliorer nettement la décomposition. Ensuite, une rétro-projection filtrée est appliquée aux sinogrammes matériau obtenus (avec un filtre d'apodisation de Hanning et une fréquence de coupure de 0,8). Cette méthode ne contient pas de régularisation spatiale autre que le filtre d'apodisation. Ainsi pour que la comparaison soit plus pertinente, un filtre "moyenne sur 9 voxels" est appliqué sur les images reconstruites avant traitement des résultats. Le résultat de cette méthode est affiché dans la figure IV.9.

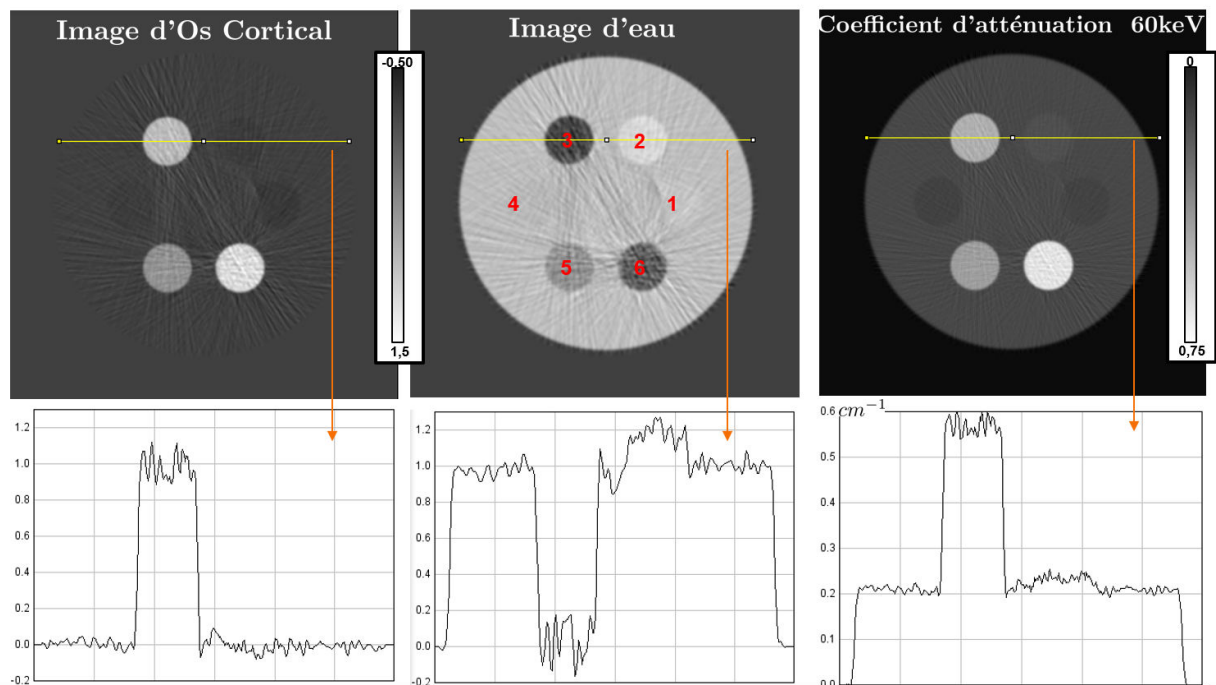


FIGURE IV.9 – Reconstruction avec la méthode *Two-Step* polynômiale par zone (16 zones dans notre cas). Position des inserts : 1 : Polyéthylène ; 2 : Plexiglas ; 3 : Os cortical ; 4 : Tissu adipeux ; 5 : Os compact ; 6 : Aluminium.

Dans la reconstruction *Two-Step* de la figure IV.9, en plus de la présence d'un niveau de bruit élevé, on remarque à partir des valeurs du tableau IV.10 un biais dans les ROIs (5-10% d'erreur) dans les volumes en matériau. Cette erreur est due au bruit dans les mesures qui conduit à une mauvaise décomposition des sinogrammes. Par opposition notre méthode montre un biais de l'ordre de 1% dans les ROIs. De plus, la méthode *Two-Step* ne se révèle pas assez précise pour différencier certains matériaux comme le polyéthylène par rapport à l'eau.

Cependant, l'image virtuelle de la méthode *Two-Step* présente un biais plus faible que dans les volumes matériau de base. En effet, bien que l'image virtuelle $\mu(60keV)$ soit bien reconstruite, la décomposition en base de matériau n'est pas aussi précise. Or cette décomposition est importante car elle permet de réaliser une étude quantitative des matériaux présents.

La méthode *Two-Step* considérée ici reste assez simple. Elle possède l'avantage de ne pas avoir de processus itératif et ainsi d'être relativement robuste pour un temps de calcul faible. Cependant, elle reste sensible au bruit car ne possède pas d'autre régularisation que le filtre appliqué sur les projections lors de la rétro-projection filtrée. Pour justifier plus amplement la stratégie *One-Step*, il faudrait la comparer à des méthodes plus complexes avec un modèle de bruit et présentant une décomposition en matériaux de base plus juste [91]. Pour améliorer la méthode *Two-Step* polynomiale par zone, il est possible d'implémenter une prise en compte de la covariance, soit avec une reconstruction jointe des deux sinogrammes en longueur de matériau [115], soit avec un traitement de dé-bruitage post-reconstruction des volumes matériau de base [119].

	True Image			"Two-step" Method			Rodesch et al. "One-Step" Method		
Type of material	C. B. map	Water map	$\mu(60\text{keV})$	C. B. map	Water map	$\mu(60\text{keV})$	C. B. map	Water map	$\mu(60\text{keV})$
Water	0.	1.	0,21	0.01	0.97	0,21	0.00	1.00	0,21
Cortical Bone	1.	0.	0,57	0.91	0.18	0,56	0.99	0.02	0,57
Compact Bone	0.66	0.60	0,50	0.65	0.63	0,50	0.65	0.64	0,50
Aluminum	1.25	0.15	0,74	1.18	0.31	0,74	1.20	0.29	0,74
Polyethylene	-0.06	1.07	0,19	-0.03	1.00	0,19	-0.05	1.04	0,19
Plexiglas	-0.04	1.22	0,23	0.02	1.10	0,24	-0.03	1.20	0,23
Adipose Tissue	-0.04	0.99	0,19	-0.01	0.94	0,19	-0.04	0.98	0,18

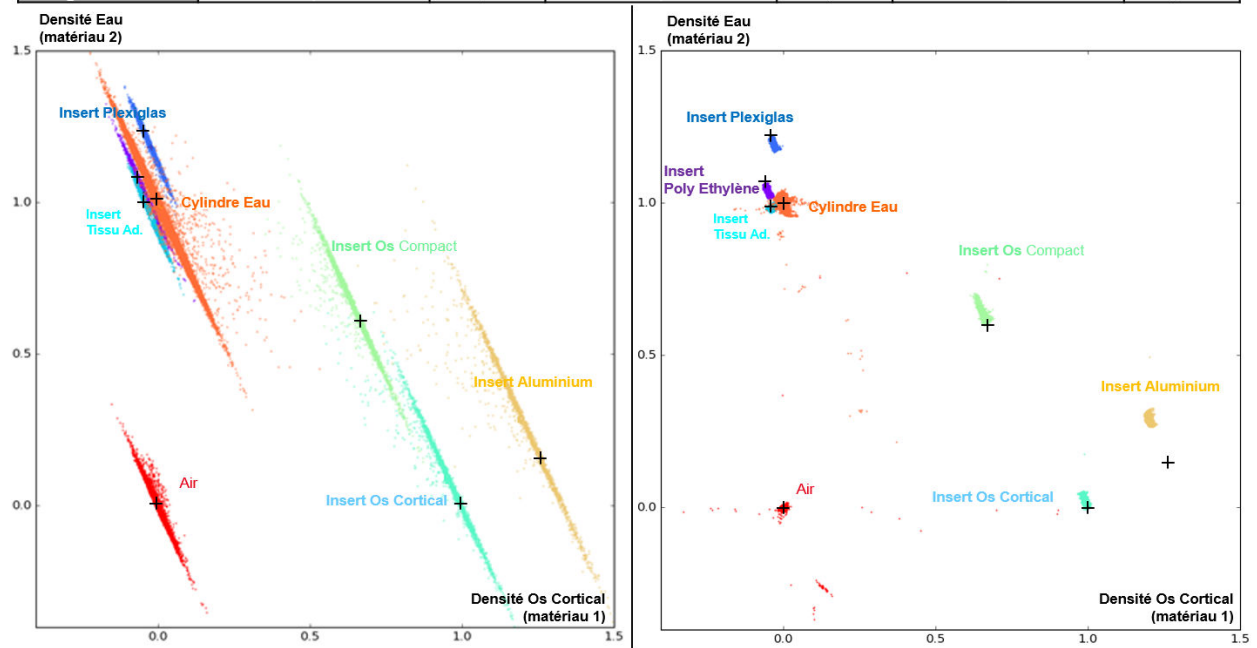


FIGURE IV.10 – Comparaison entre le résultat d'un MLTR-ONE-STEP régularisé ($\beta = 0.05$ et $\delta_T = 0.1$) et la méthode *Two-Step* polynomiale par zone (16 zones). En HAUT : comparaison des valeurs dans les ROIs.

En BAS : comparaison des cartes (f_1 ; f_2) : Gauche *Two-Step*; droite : *One-Step*).

(Les voxels frontières sont rognés et non affichés : cf annexe E pour la carte avec voxels frontières).

IV.2 Etude de l'influence des paramètres de la régularisation spatiale

IV.2.1 Etude du gradient de l'image

Dans le cas étudié, le choix des paramètres de la régularisation est un compromis entre un lissage des petites variations engendrées par le bruit et le respect des bordures de l'image (changement de matériaux). Le seuil δ_T de la fonction de Tukey est le paramètre qui détermine si une variation est due au bruit ou à un changement de matériau. Si celui-ci est fixé trop grand, les fron-

tières entre matériaux sont lissées (à tort). Si le seuil est défini trop faible, le bruit va être interprété comme une information physique.

Ces variations spatiales sont caractérisées par le gradient de l'image. Si l'on regarde les histogrammes de ce gradient, on voit apparaître les frontières entre matériaux. Pour illustrer notre propos, les gradients selon x pour les volumes décomposés en eau et os cortical de l'image parfaite de notre exemple sont tracés dans la figure IV.11. Les valeurs de ce gradient peuvent être directement comparées au seuil de la régularisation. Le gradient de l'image selon y présente le même aspect. Même si les histogrammes précis ne sont pas connus en pratique, ils reflètent une connaissance a priori sur l'objet : matériaux présents et niveau de bruit. Cette connaissance sert à fixer les paramètres de la régularisation.

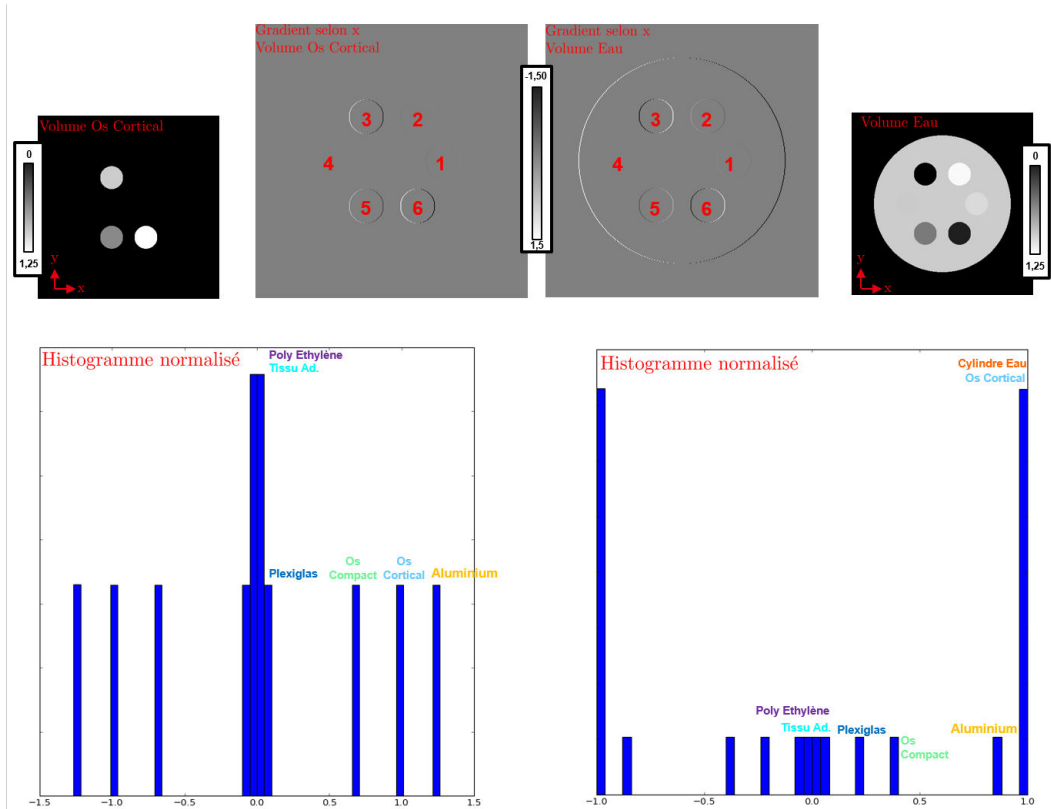


FIGURE IV.11 – Histogramme des images en gradient selon x des volumes en eau et os cortical parfait.

Les variations plus faibles que le seuil choisi vont ainsi être lissées peu importe leur source. On voit par exemple que la frontière entre l'eau et le tissu adipeux a tendance à être lissée avec $\delta_T = 0.1$. Néanmoins le terme d'attache aux données apporte aussi de l'information. Le poids relatif accordé à la régularisation (paramètre β) permet de gérer le compromis entre connaissance a priori et connaissance par les mesures.

IV.2.2 Effet sur les cartes ($f_1; f_2$)

Nous regardons maintenant l'influence des paramètres de la régularisation. Seuls le poids de la régularisation β et le seuil de Tukey δ_T varient dans les résultats affichés dans la figure IV.12.

On peut observer qu'en rendant la régularisation plus forte (augmentation de β ou diminution de δ_T), les nuages tendent à se resserrer. L'augmentation du poids β tend à allonger les nuages (comme si ils se rejoignaient) : les frontières ont tendance à être lissées et les bords francs à dispa-

raître. La diminution du seuil tend à rendre compact les nuages tout en respectant les frontières. Cependant, un seuil trop faible va se montrer trop tolérant vis-à-vis de certaines variations non physiques.

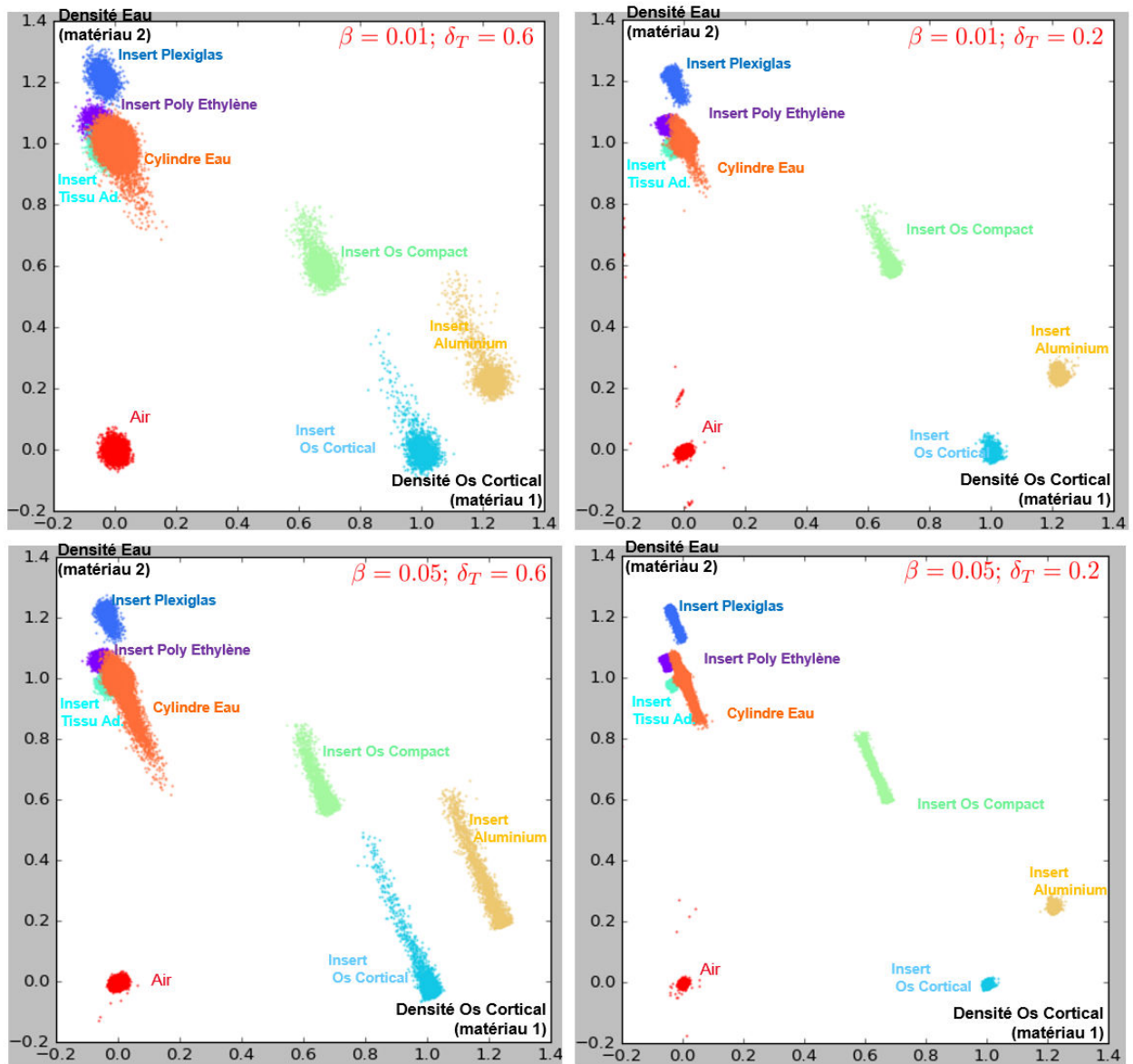


FIGURE IV.12 – Résultats de la reconstruction MLTR-ONE-STEP avec volumes initialisés, $\lambda = 0.5$, 1 angle de vue par subset soit 360 subsets, 500 itérations et paramètres de régularisation variables.

Nous avons vu que le choix des paramètres de régularisation a une grande influence sur le résultat final. Néanmoins le choix de la valeur de ces paramètres n'est pas aisé. La définition automatique de ces paramètres constitue un domaine de recherche en soi. Par exemple, Choi et al. [128] combinent une reconstruction avec un algorithme de rétro-projection filtrée et une reconstruction statistique avec la norme Total Variation.

Une autre possibilité est d'ajouter un autre terme de régularisation. Un terme de lissage spatial modifie la mise à jour d'un voxel en fonction de la valeur des ses voisins spatiaux. Il est aussi possible prendre en compte les "voisins" au sens de la carte $(f_1; f_2)$ (i.e. les voxels d'un même matériau). Nakada et al. [110] implémentent par exemple ce type de régularisation. Ce type d'*a priori* dépend grandement du domaine d'application étudié.

IV.3 Etude d'un cylindre avec 6 inserts de même matériau mais de densités différentes

IV.3.1 Présentation de l'objet

Nous considérons les mêmes géométries et paramètres d'acquisition que pour la partie IV.1. La différence est dans l'objet : il contient 6 inserts de même matériau (Os compact) mais de densités ρ différentes (cf figure IV.13).

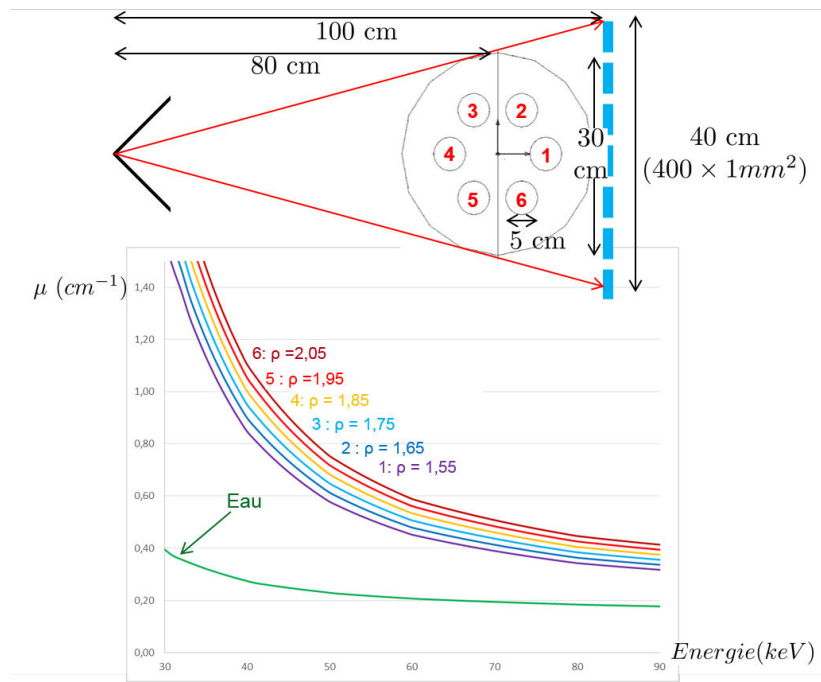


FIGURE IV.13 – Présentation d'un deuxième objet d'étude.

IV.3.2 Résultat en reconstruction Eau/Os cortical et Eau/Aluminium

Pour la reconstruction, les paramètres sont identiques au cas de la reconstruction avec régularisation de la sous-partie précédente : volumes initialisés par méthode polynômiale standard, $\lambda = 0.5$, 1 angle de vue par subset soit 360 subsets, 500 itérations, $\beta = 0.05$ et $\delta_T = 0.1$. Nous effectuons deux reconstructions. Dans la première nous reconstruisons deux volumes en Eau et Os cortical et dans la deuxième deux volumes en Eau et Aluminium. Les résultats sont affichés sous forme de carte ($f_1; f_2$) dans la figure IV.14.

Nous retrouvons dans les deux cas la forme allongée des nuages de points le long des droites à atténuation constante. La pente de ces droites dépend des matériaux de base choisis pour la reconstruction.

Les résultats montrent que les inserts de même matériau mais de densités différentes évoluent sur une même droite (en pointillés noirs sur la figure). Ceci est observé sur les deux cartes. L'alignement d'inserts de même matériau mais de densités différentes permet de vérifier la cohérence de la reconstruction. L'Aluminium étant un matériau plus dur que l'os cortical (plus "éloigné" de l'eau), la décomposition est plus aisée et ainsi les nuages de points un peu plus resserrés.

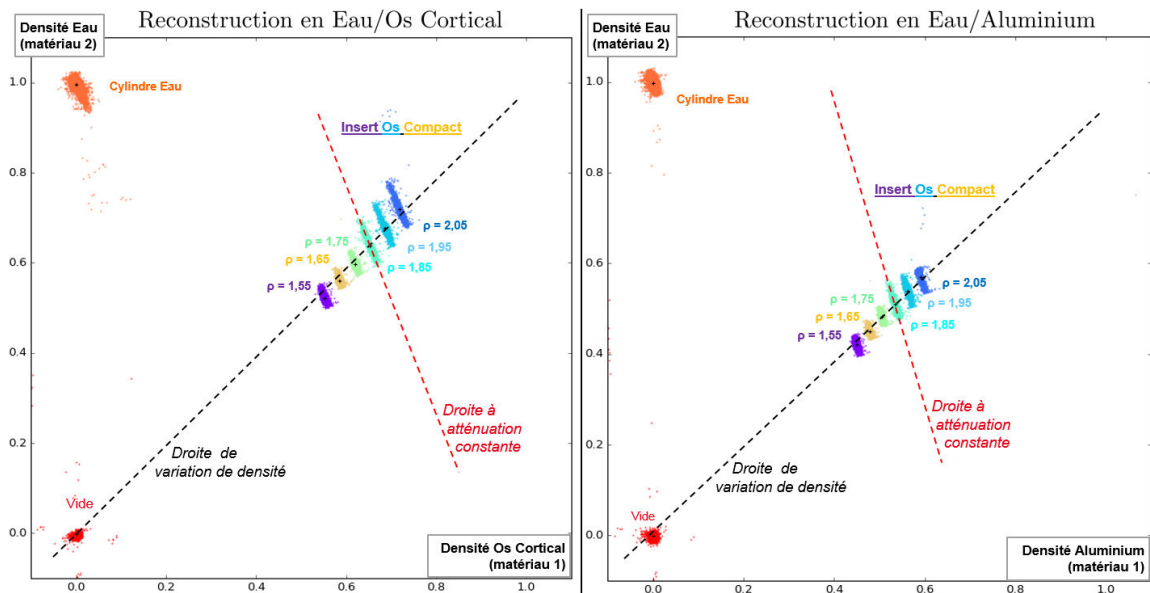


FIGURE IV.14 – Comparaison des cartes $(f_1; f_2)$ pour le cas de reconstruction en Eau/Os cortical et Eau/Aluminium. les '+' affichés sur chaque carte sont les valeurs vraies attendues pour chaque insert.

IV.4 Influence du nombre de canaux de mesure

Nous étudions dans cette sous-partie l'influence du nombre de canaux de la mesure. Nous reprenons pour cela l'objet de la sous-partie IV.1. Avec les détecteurs développés au laboratoire du CEA/LETI/LSIV, le nombre de canaux mesurés est en pratique de 64. Ils sont ensuite regroupés (les photons sont sommés) en fonction du nombre de canaux et des bornes choisies.

IV.4.1 Comparaison du résultat final entre 2 et 20 canaux

La méthode MLTR-ONE-STEP est maintenant appliquée en regroupant les mesures en 2 ou 20 canaux. Nous regardons dans un premier temps le résultat dans les cartes $(f_1; f_2)$ au bout de 200 itérations (cf figure IV.15). L'état initial a été dans le cas présent lissé (filtre "moyenne sur 9 voxels").

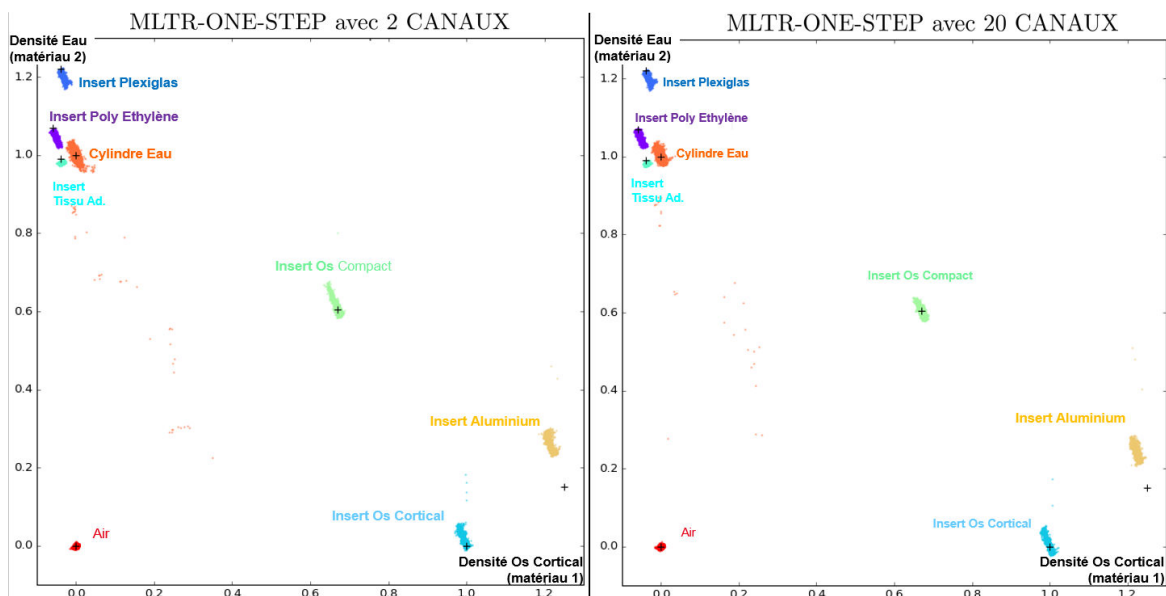


FIGURE IV.15 – Comparaison des cartes $(f_1; f_2)$ pour le cas de reconstruction avec 2 ou 20 canaux. Les '+' affichés sur chaque carte sont les valeurs vraies attendues pour chaque insert.

On peut voir qu'il n'y a pas de différence notable dans le résultat final entre les deux reconstructions : le biais dans chaque ROI est équivalent. De plus, alors que le bruit dans chaque canal est plus élevé dans la cas où il y a 20 canaux de mesure, on peut observer que celui-ci n'est pas plus élevé dans les volumes reconstruits. Pour quantifier cela, nous étudions en détails deux critères globaux de convergence dans le prochain paragraphe.

IV.4.2 Etude d'un critère global

Dans ce paragraphe, les mesures sont regroupées en 2, 6, 11, 20 ou 25 canaux. Pour un nombre de canaux donné, la largeur des canaux est fixe et les canaux sont pris entre 15 et 120 keV. Nous étudions ici trois cas : un cas de données non bruitées sans régularisation, un cas de données bruitées sans régularisation et un cas de données bruitées avec régularisation. Les autres paramètres de la méthode sont tous pris identiques dans ces 5 cas : volumes initialisés par méthode polynômiale standard, $\lambda = 0.5$, 1 angle de vue par subset soit 360 subsets, $\beta = 0.05$ et $\delta_T = 0.1$. Nous calculons à 100, 200 ou 300 itérations l'erreur quadratique globale :

$$Erreur\ Quad. = \sum_{b=1}^2 \sum_{j \in ROIs} (f_{bj} - f_{bj}^{th})^2 \quad (IV.4)$$

avec b l'indice de matériau de base et f_{bj}^{th} la valeur théorique. Cette erreur est calculée sans prise en compte des voxels frontière. Le résultat est affiché dans la figure IV.16.

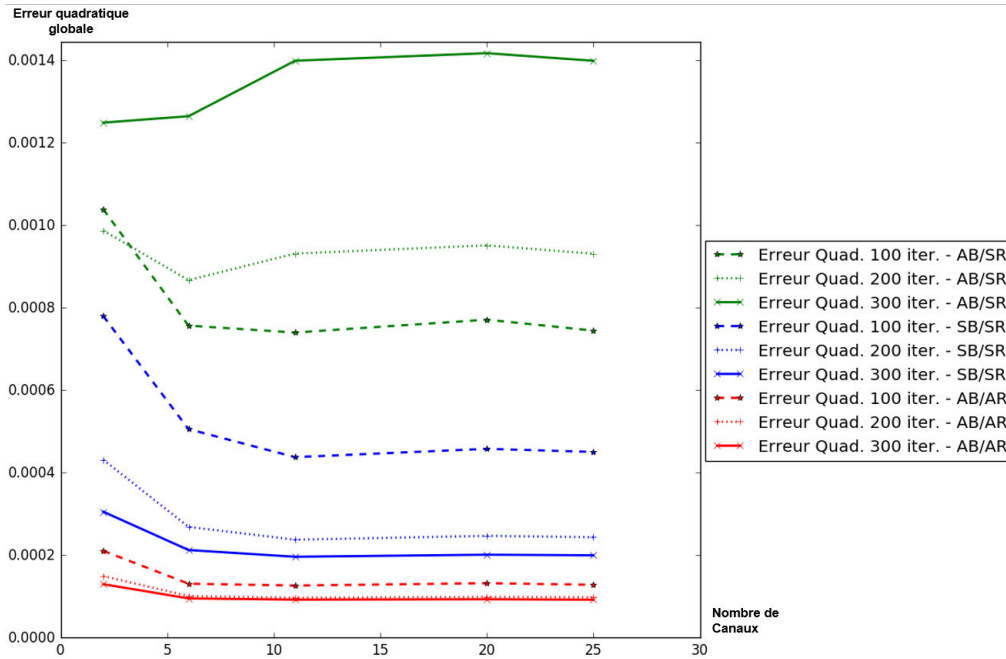


FIGURE IV.16 – Erreur quadratique de la reconstruction MLTR-ONE-STEP selon le nombre de canaux. AB/SR : Avec Bruit Sans Régularisation (couleur verte). SB/SR : Sans bruit et Sans Régularisation (couleur bleue). AB/AR : Avec Bruit et Avec Régularisation (couleur rouge).

On voit que dans le cas de l'absence de régularisation (courbes de couleur verte), le résultat diverge à partir de 100 itérations (l'erreur augmente). De plus, il diverge d'autant plus vite que le nombre de canaux est élevé. En l'absence de bruit (courbes de couleur bleue) et étant donnés les points disponibles, l'erreur est minimale et constante à partir de 12 canaux. Dans le cas avec régularisation (courbes de couleur rouge), l'erreur quadratique ne diminue plus à partir de 6 canaux. Ces observations sont principalement dues à une meilleure vitesse de convergence en nombre

d'itérations avec plus de canaux. L'erreur calculée dans le cas avec régularisation avec 2 canaux de mesure atteint la même valeur que dans les autres cas mais avec un nombre d'itérations plus élevé. Nous comparons plus en détail dans la sous-partie suivante la vitesse de convergence des résultats obtenus à partir de 2 ou 20 canaux.

Un deuxième critère important pour évaluer un résultat de reconstruction est le niveau de bruit. En effet, pour les mêmes paramètres de la source (i.e. à nombre de photons incidents constant), plus le nombre de canaux est élevé, plus le nombre de photons par canal est faible et le bruit important par canal. Nous regardons maintenant la somme totale des écarts-types dans les ROIs dans les deux matériaux de base en fonction du nombre de canaux au bout de 100, 200 ou 300 itérations. Ce résultat est affiché dans la figure IV.17.

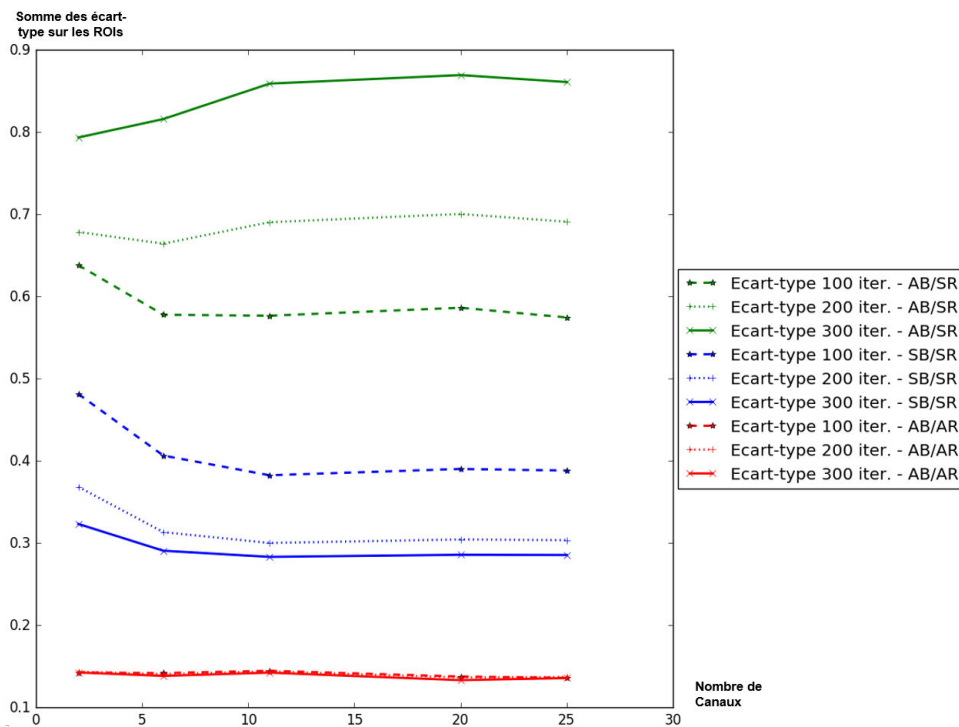


FIGURE IV.17 – Somme des écarts-types sur toutes les ROIs sur les deux volumes matériau de base du résultat de la reconstruction MLTR-ONE-STEP en fonction du nombre de canaux. AB/SR : Avec Bruit Sans Régularisation (couleur verte). SB/SR : Sans bruit et Sans Régularisation (couleur bleue). AB/AR : Avec Bruit et Avec Régularisation (couleur rouge).

Comme dans le cas de l'erreur quadratique, on observe que l'écart-type se détériore à partir de 100 itérations en l'absence de régularisation. Cet écart-type augmente d'autant plus que le nombre de canaux est élevé. Grâce à la régularisation, l'écart-type n'augmente pas avec le nombre de canaux, comme observé sur les courbes rouges.

Si toutes les données sont parfaitement connues, le nombre de canaux minimum nécessaire mathématiquement pour reconstruire deux volumes en matériaux de base est deux (cf résultats précédents). Un nombre de canaux plus important va augmenter la durée d'une mise à jour (et donc de la reconstruction). Cependant, la prise en compte d'un canal dans le schéma de mise à jour (cf équation III.44) peut être parallélisé dans l'implémentation (de la même manière que les pixels). Nous comparons la convergence dans certaines ROIs dans le prochain paragraphe avec 2 ou 20 canaux de mesure.

IV.4.3 Comparaison de la vitesse de convergence entre 2 et 20 canaux

Nous comparons ici la vitesse de convergence d'une reconstruction à partir d'une mesure bi-énergie (2 canaux) ou d'une mesure avec un nombre de canaux très élevé (20 canaux). En effet, les méthodes de reconstruction dans la littérature avec détecteurs à comptage utilisent très souvent 4, 5 ou 6 canaux.

IV.4.3.1 Avec état initial

On regarde maintenant l'évolution de la valeur moyenne et l'écart-type dans certaines ROIs au cours des itérations (cf figure IV.18). Nous étudions les ROIs de l'insert en Os Compact dans les deux volumes matériaux de base, de l'Os Cortical dans le volume matériau 1 et le cylindre en eau dans le matériau 2. (La valeur attendue pour ces deux dernières ROIs est 1.) Dans la figure IV.18, la valeur affichée est l'erreur moyennée par le nombre de voxels d'un insert :

$$Erreur = \frac{1}{N_{ROI}} \times \frac{\langle f \rangle - f_{ref}}{f_{ref}} \quad (IV.5)$$

avec $\langle f \rangle$ la densité moyenne sur la ROI.

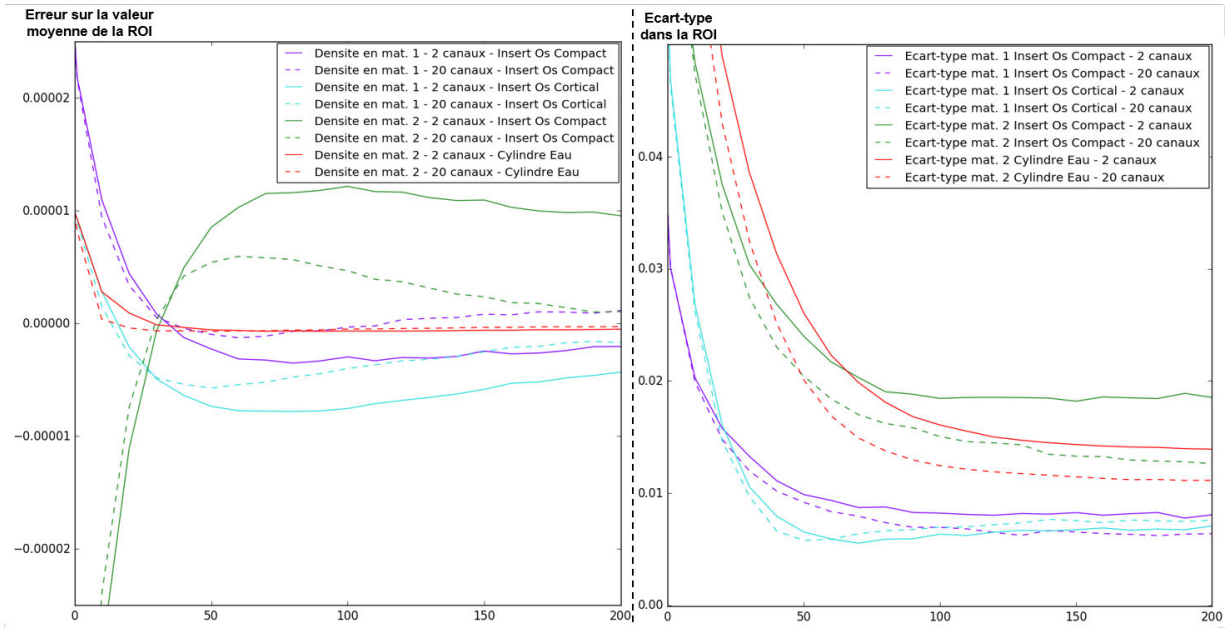


FIGURE IV.18 – A gauche : Erreur sur la valeur moyenne dans chaque ROI au cours des itérations.

A droite : Ecart-type dans chaque ROI au cours des itérations.

En continu : résultat avec 2 canaux. En pointillés : résultat avec 20 canaux.

On observe que la reconstruction avec 20 canaux de mesure converge plus vite que celle avec 2 canaux. Cela provient du fait que l'on calcule pour chaque mise à jour 20 résidus au lieu de seulement 2. Cela permet une mise à jour plus précise et donc la vitesse de convergence en nombre d'itérations de la méthode est améliorée. De plus, on peut observer que les niveaux de bruit sont équivalents. Dans le cas d'un état initial proche, la différence de vitesse de convergence est faible entre le cas à 2 canaux et 20 canaux. Nous l'étudions dans le paragraphe suivant le cas d'un état initial nul.

IV.4.3.2 Sans état initial

Nous initialisons maintenant la méthode avec des volumes nuls et nous étudions de la même manière les moyennes et écarts-types dans les ROIs. Pour éviter que la reconstruction ne diverge,

il faut modifier les paramètres de mise à jour. Nous modifions juste le nombre de subsets (i.e. le nombre d'angle de vues pris en compte dans une mise à jour). Dans les résultats précédents ce paramètre était fixé à un angle de vue par mise à jour (soit 360 subsets). Nous le fixons maintenant à 5 angles de vue (72 subsets) pour le cas à 2 canaux et 2 angles de vues (180 subsets) pour 20 canaux. Pour les deux cas étudiés, les paramètres ne sont pas modifiés de la même manière. En effet, la reconstruction avec 20 canaux de mesure ne diverge pas pour un nombre de subset plus élevé par itération. Le résultat au bout de 500 itérations est affiché dans la figure IV.19. (Les cartes $(f_1; f_2)$ sont affichées dans l'annexe E).

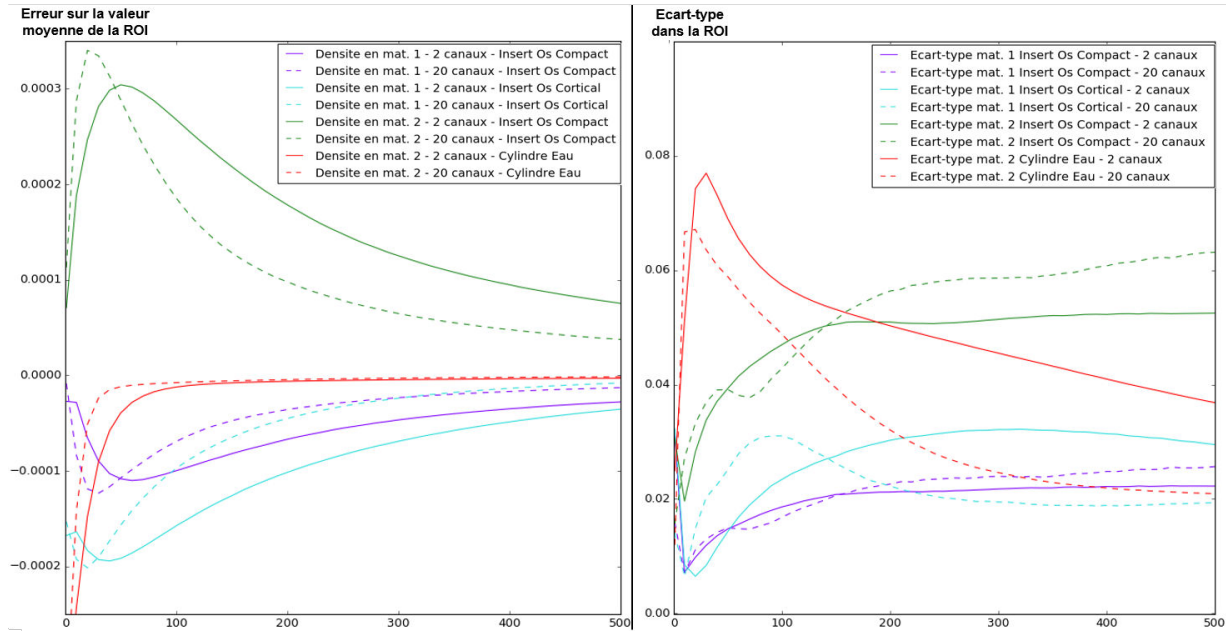


FIGURE IV.19 – A gauche : Erreur sur la valeur moyenne dans chaque ROI au cours des itérations.

A droite : Ecart-type dans chaque ROI au cours des itérations.

En continu : résultat avec 2 canaux. En pointillés : avec 20 canaux.

On observe que la reconstruction avec 20 canaux est bien plus rapide que celle à 2 canaux. Cela est dû à un plus grand nombre de subsets (permis par le nombre de canaux plus élevé) et une mise à jour plus précise. La comparaison de la convergence avec et sans état initial permet bien de prouver l'apport d'un état initial convenable sur le résultat final.

IV.4.4 Conclusion sur l'étude sur le nombre de canaux de mesure

En conclusion, nous avons montré que le nombre de canaux en entrée de la méthode MLTR-ONE-STEP n'influe pas sur le résultat à convergence. Cela est dû à la parfaite connaissance du modèle direct (spectre efficace et fonctions de base) et à la simulation de données conformes à nos hypothèses (absence de diffusé et de phénomène d'empilement). Néanmoins, le calcul de plus de résidus par mise à jour permet d'accélérer la méthode en nombre d'itérations. Cependant chaque mise à jour est plus coûteuse en calcul. En effet, le coût calculatoire d'une mise à jour dépend principalement de l'opération de projection/rétroprojection. Une fois cette opération effectuée, le coût de calcul du schéma du MLTR-ONE-STEP est proportionnel au nombre de canaux. Un compromis entre le nombre de canaux et la vitesse de reconstruction peut être étudié dans le cas d'un code parallélisé. Dans notre implémentation sans parallélisation de la prise en compte des données, le gain en nombre d'itérations ne compense pas le temps de calcul par itération.

IV.5 Conclusion du chapitre

En conclusion, la méthode de reconstruction MLTR-ONE-STEP que nous proposons permet bien de reconstruire en matériaux de base un problème de PCD-CT avec modèle linéaire de détecteur. La régularisation robuste à l'aide de la fonction de Tukey permet de gérer le bruit et de diminuer l'erreur de reconstruction. La comparaison avec la méthode *Two-Step* polynomiale par zone montre l'apport d'une reconstruction statistique. Pour permettre de valider l'avantage d'une méthode *One-Step* par rapport à une méthode *Two-Step*, une comparaison avec une méthode *Two-Step* plus évoluée serait nécessaire. Il peut s'agir soit d'une décomposition en sinogrammes longueurs de matériau avec modèle de bruit soit d'une reconstruction jointe de ces sinogrammes. Dans ces deux cas, la méthode de reconstruction *Two-Step* est plus longue en temps de calcul que la méthode polynomiale par zone utilisée dans ce chapitre.

La description d'un modèle direct spectral et sa prise en compte dans la reconstruction conduit à des volumes reconstruits sans artefact. La méthode suppose une bonne connaissance du spectre incident et de la réponse du détecteur. De plus, le modèle direct peut être mis en défaut dans le cas de présence de rayonnement diffusé non négligeable ou d'empilements au sein du détecteur. Certains cas d'application peuvent également présenter des conditions de bruit plus difficiles que celle étudiées dans ce chapitre.

L'algorithme est toujours initialisé avec des volumes déjà représentatifs de la décomposition en matériaux de l'objet. Cette initialisation est importante dans la mesure où une régularisation non convexe est ajoutée au modèle et pour permettre une convergence plus rapide de l'algorithme. Les résultats montrés ont été obtenus avec un très grand nombre d'itérations (500) pour valider la méthode. La vitesse de convergence du MLTR-ONE-STEP reste faible malgré l'implémentation en mode "ordered-subset". Il est possible d'améliorer le temps de calcul avec un autre algorithme d'optimisation de la fonction de coût ou la parallélisation du code implémenté. L'obtention d'un meilleur état initial est aussi pertinente pour accélérer la vitesse de convergence mais cela est difficile à moindre coût de calcul.

La qualité de notre méthode dépend du choix des paramètres de la reconstruction et de la régularisation. Ceux-ci ont été optimisés dans les résultats de cette partie. Ils sont l'expression d'une connaissance au préalable de l'objet reconstruit et dépendent du domaine d'application (cf partie I.7). Le poids et le seuil de régularisation jouent un rôle important dans le résultat final et fixer leur valeur est difficile. En effet, le choix optimal pour ces paramètres varie selon l'objet étudié, les conditions de bruit... Dans cette perspective, il est possible d'ajouter un autre terme *d'a priori* dans l'espace $(f_1; f_2)$.

L'étude sur le nombre de canaux a montré que le nombre de canaux de mesure a peu d'influence sur le résultat final. L'augmentation du nombre de canaux permet de converger en moins d'itérations avec des temps de calcul par itération plus grand. La prise en compte de canaux peut de la même façon que la prise en compte des pixels faire l'objet d'une optimisation "ordered-subsets" et d'une parallélisation.

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus dans le cas d'un modèle direct parfaitement connu (données issues de la simulation). Il est possible d'étudier la robustesse du MLTR-ONE-STEP vis-à-vis d'une mauvaise connaissance du modèle direct. De plus, cette robustesse peut dépendre du nombre de canaux de mesure utilisés en donnée d'entrée de la méthode. La difficulté d'une telle étude est la modélisation réaliste d'une mauvaise connaissance du spectre efficace.

Dans le chapitre suivant, nous investiguons l'application du MLTR-ONE-STEP à des mesures expérimentales réelles obtenues avec un détecteur à comptage résolu en énergie.

Chapitre V

Reconstruction MLTR-ONE-STEP à partir de données expérimentales

Dans ce chapitre, nous appliquons le MLTR-ONE-STEP à des données expérimentales. Comme présenté dans le chapitre II état de l'art, encore beaucoup de méthodes de reconstruction tomographique spectrale ne sont appliquées que sur des données issues de la simulation. Nous présentons dans une première sous-partie le cas étudié, puis nous reconstruisons l'objet avec la méthode MLTR-ONE-STEP (introduite dans le chapitre 3).

V.1 Présentation du cas d'étude - 12 canaux

V.1.1 Objet étudié

L'objet étudié (cf photo V.1) est constitué de trois cylindres : deux gros et un moyen. Les deux cylindres de plus grand diamètre sont en plexiglas et l'un d'eux est plein. L'autre présente 5 inserts dont un contenant du PVC (même matériau que la base de calibration), un autre est vide et les trois autres contiennent trois matériaux plastiques différents : du plastique PE (proche du PP : matériau de la base de calibration), du PTFE et du PVDF. Le cylindre de diamètre plus petit est en plastique-POM et contient trois inserts remplis soit de plastique POM homogène soit de plastique POM ou PTFE sous forme de copeaux. Les plus gros cylindres mesurent 100 *mm* de diamètre, le cylindre moyen 80 *mm* et les petits inserts 20 *mm* de diamètre.

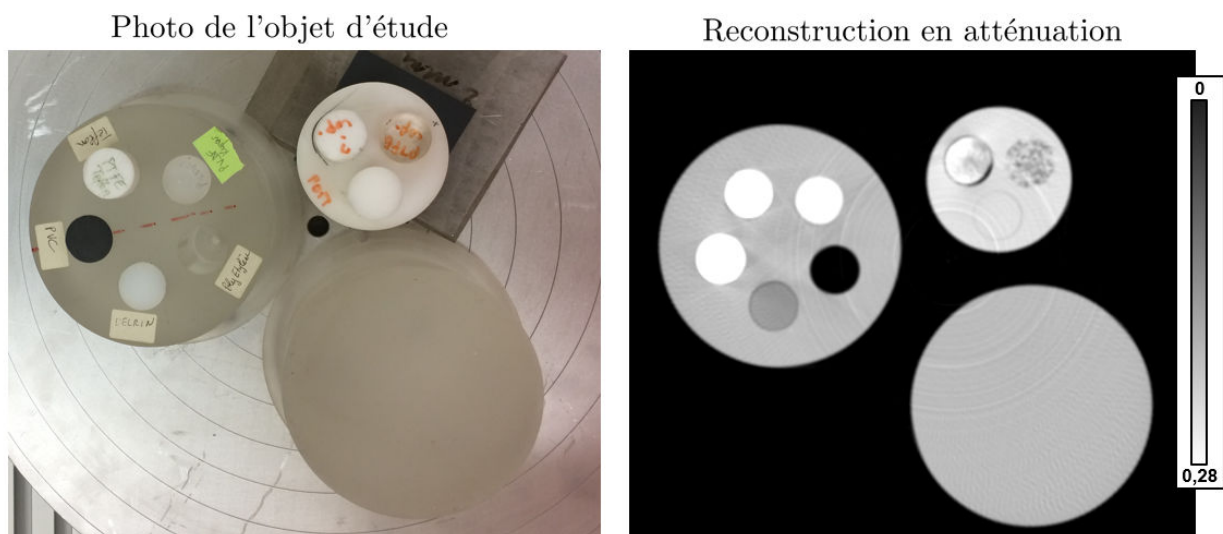


FIGURE V.1 – A gauche : photo de l'objet d'étude sur le banc de mesure.
A droite : reconstruction en atténuation réalisée avec une rétro-projection filtrée. (Echelle : cm^{-1}).

V.1.2 Conditions d'acquisitions

Le détecteur est placé à 150 *cm* de la source et le centre de rotation à 125 *cm* de la source (cf figure V.2). Le détecteur utilisé est le détecteur linéaire MultiX©ME100 (matériau semi-conducteur : CdTe et épaisseur 3 *mm*). Il est composé de 5 barrettes de 128 pixels carrés de taille 800 μ m. Un collimateur horizontal est placé en sortie de la source et devant le détecteur. Il permet d'avoir un niveau de mesure de rayonnement diffusé faible.

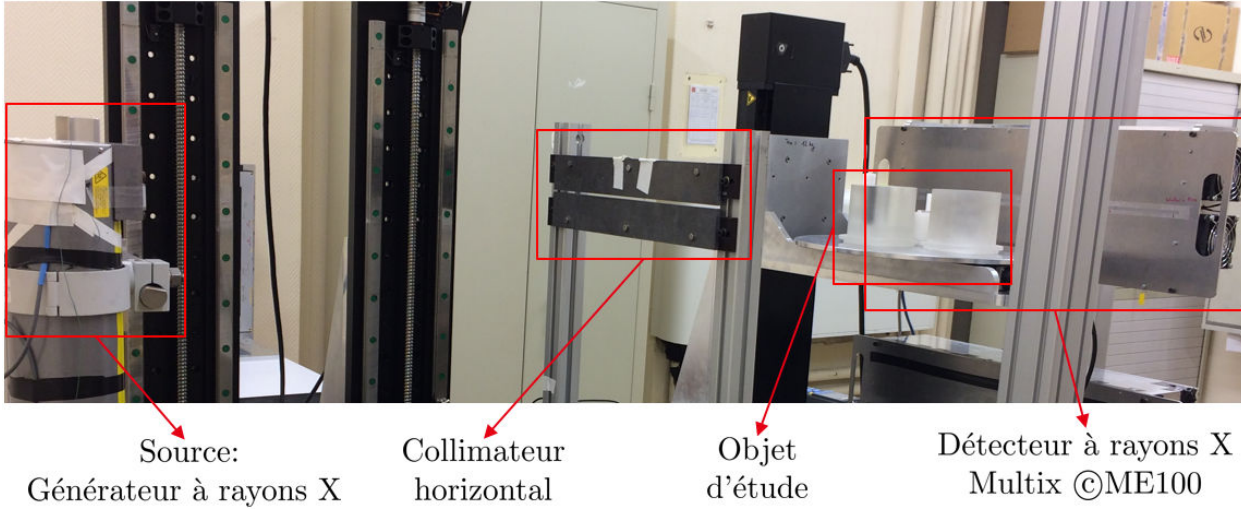


FIGURE V.2 – Photographie du banc de mesure.

La tension de la source est réglée à 160 *kV*, l'intensité à 1.85 *mA* et le temps d'acquisition d'une projection est fixé à 1 *s*. Ces données permettent un flux de photons faible qui évite le phénomène d'empilement. Ces conditions donnent un niveau de bruit des mesures faible étant donné les dimensions et les matériaux de l'objet. Le nombre de photons en l'absence d'objet est de 2.3×10^6 photons. Avec l'objet, le nombre de photons au pixel le plus atténué est de 1.9×10^4 . 360 angles de vue espacés de 1° ont été mesurés (sinogramme affiché en annexe F).

La reconstruction affichée dans la figure V.1 est la reconstruction avec un algorithme de rétro-projection filtrée. Pour cette reconstruction, les photons ont été sommés sur tous les canaux pour former la grandeur m^{total} (i.e. le sinogramme affiché en annexe F). Puis l'atténuation p a été calculée : $p = -\log\left(\frac{m^{total}}{m^0}\right)$ avec m^0 la mesure plein flux. Cette reconstruction présente des légers artéfacts entre les 5 inserts présents dans l'un des cylindre de grand diamètre. De plus, le niveau de bruit dans l'image reconstruite en atténuation (cf figure V.1) est faible.

Les volumes reconstruits contiennent $320 \times 320 \times 1$ voxels cubiques de taille 800 μ m. Ainsi le volume reconstruit mesure $256 \times 256 \times 0.8$ mm³. Une contrainte de support cylindrique centrée au milieu du volume et de rayon 128 *mm* est appliquée. Les valeurs en dehors ce cylindre de support sont imposées nulles. Pour reconstruire une telle zone spatiale, seules les mesures fournies par les trois barrettes centrales du détecteur sont nécessaires.

Le détecteur MultiX©ME100 permet de classer les photons en 64 canaux. Nous les regroupons en 12 canaux de 11keV de large en utilisant les seuils 22/33/44/55/66/77/88/99/110/121/132/143/154 *keV* (cf figure V.3).

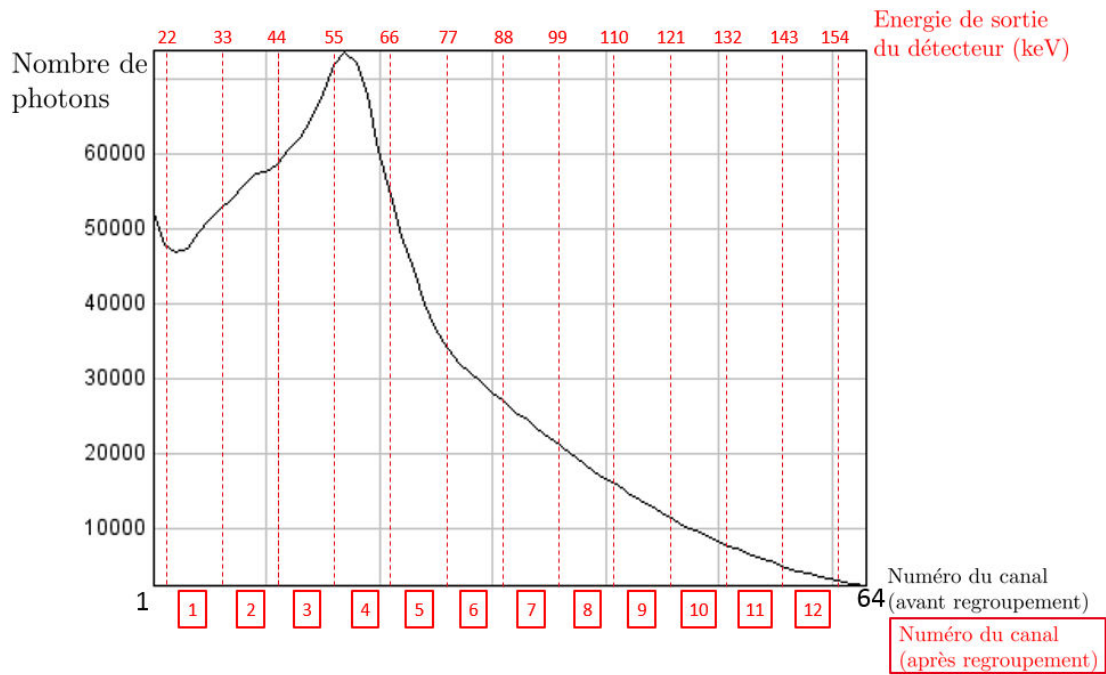


FIGURE V.3 – Spectre de mesure issu du détecteur ME100 pour une mesure plein flux. Les traits en pointillés rouge figurent les seuils utilisés pour regrouper les canaux.

V.2 Résultats de la Reconstruction

Les volumes de base sont initialisés avec une méthode *Two-step Projection-Based* : une décomposition des sinogrammes en longueur de matériau (PP et PVC) est réalisée par utilisation d'une fonction inverse polynomiale par canal et par gamme (la gamme d'atténuation est divisée en plusieurs zones). Pour cette méthode de reconstruction, nous regroupons les mesures en deux canaux. Les sinogrammes en longueur de matériau de base sont ensuite reconstruits avec une méthode de rétro-projection filtrée.

Comme données d'entrée de la reconstruction MLTR-ONE-STEP, nous prenons les coefficients du PP et du PVC calculés avec la base de données Storm&Israël [129], le spectre efficace correspondant aux paramètres de la source et du détecteur estimé selon une méthode disponible au laboratoire CEA/LETI/LSIV et les mesures regroupées en 12 canaux.

Pour la reconstruction MLTR-ONE-STEP, nous choisissons les paramètres :

- Le coefficient de relaxation : $\lambda = 0.01$.
- Le poids de la régularisation : $\beta = 0.3$.
- Le seuil de Tukey : $\delta_T = 0.05$.
- Le nombre de subset : $N_s = 120$ (3 angles de vue pris en compte par mise à jour).
- Nombre d'itérations : 1000.

Nous avons pris une valeur de coefficient de relaxation faible pour garantir la convergence de la reconstruction en présence d'un poids de la régularisation important. Le nombre d'itérations pour arriver à convergence est donc élevé. Les volumes en matériaux de base reconstruits sont affichés dans les figures V.4 et V.5.

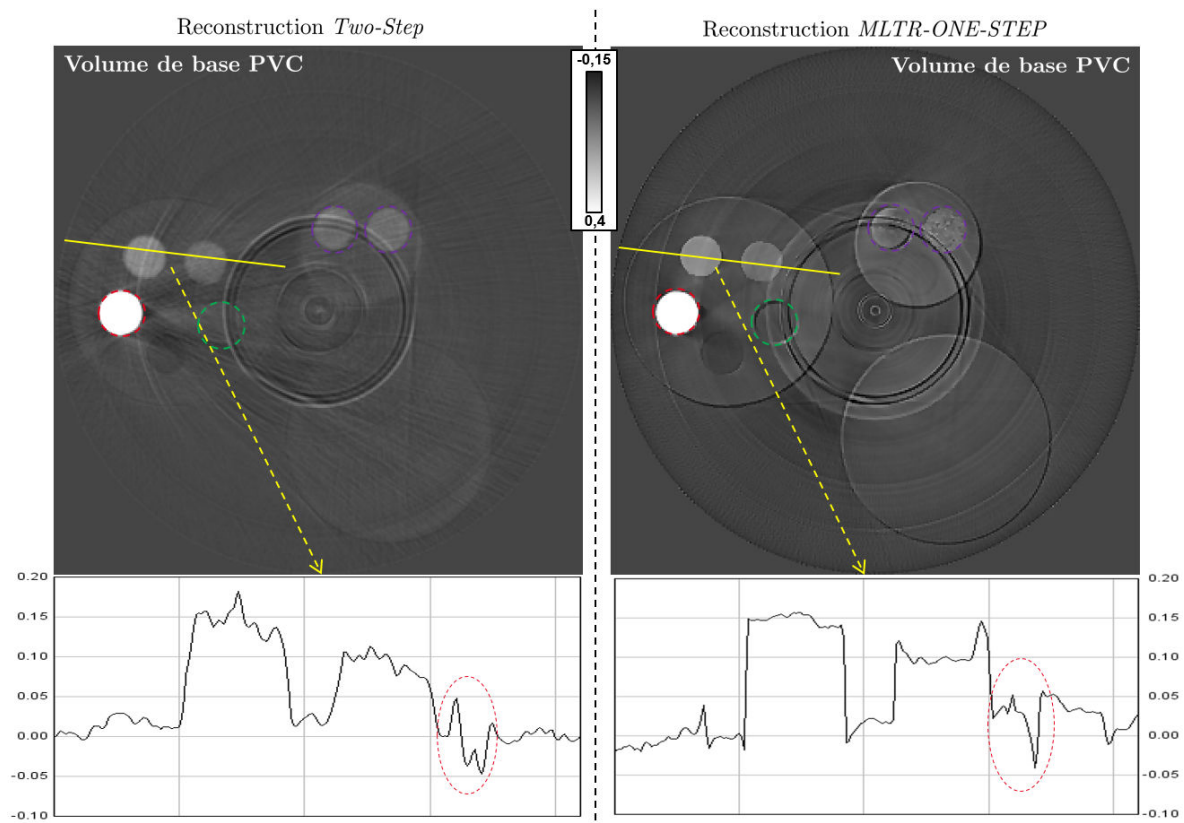


FIGURE V.4 – Les volumes matériau de base PVC (matériau 1) reconstruits. Dans l'image sont entourés en pointillés rouges l'insert de PVC, en bleus l'insert vide, en violets les inserts composés de copeaux. Dans le profil : la zone entourée correspond aux voxels touchés par le ring artéfact.

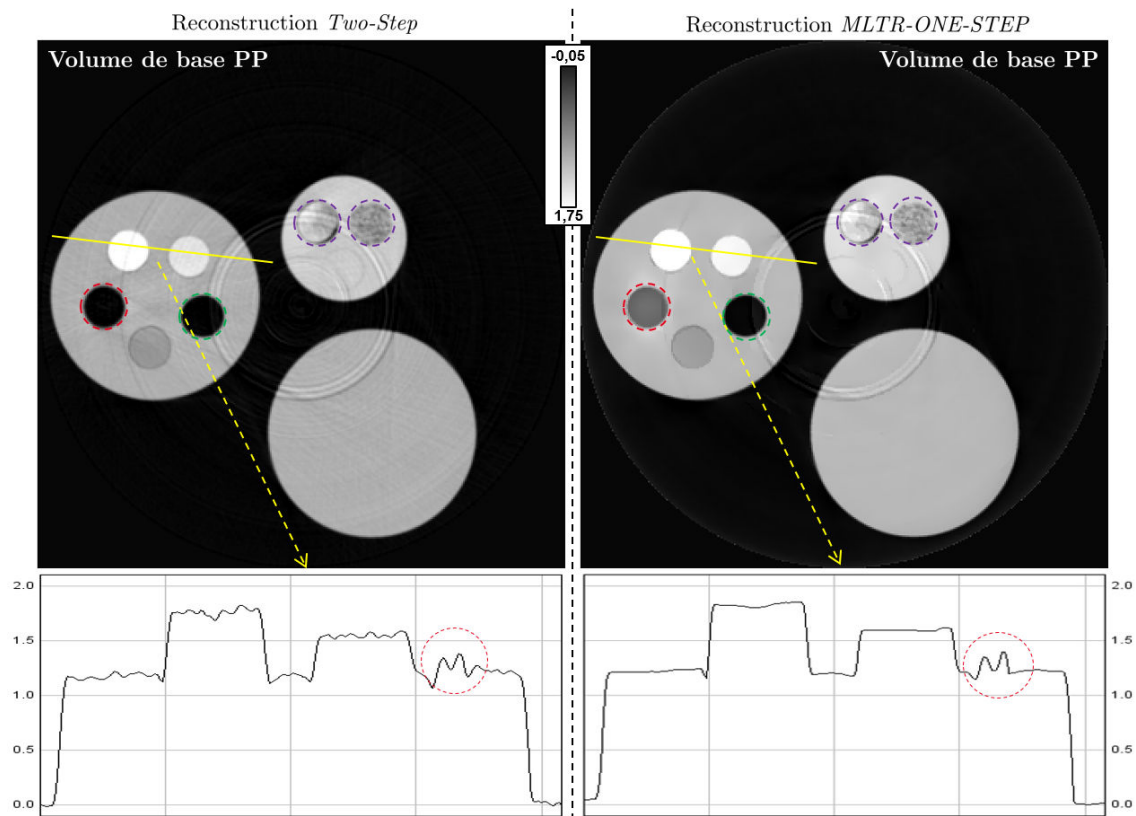


FIGURE V.5 – Les volumes matériau de base PP (matériau 2) reconstruits. Dans l'image sont entourés en pointillés rouges l'insert de PVC, en bleus l'insert vide, en violets les inserts composés de copeaux. Dans le profil : la zone entourée correspond aux voxels touchés par le ring artéfact.

On peut voir apparaître dans les volumes de la figure V.4, deux *ring* artéfacts marqués au niveau des inserts en copeaux et de l'insert vide. Ils sont causés par des pixels défectueux du détecteur (présents dans le profil tracé). Les volumes reconstruits avec régularisation présentent un aspect plus net (contours plus marqués). Dans la figure V.4, le rond central qui apparaît plus clair au centre du volume 4 (en bas à droite) correspond à la rétro-projection des mesures de la barrette centrale du détecteur.

L'effet de la régularisation est plus visible sur les volumes PP (matériau de base 2) présentés sur la figure V.5, en particulier sur les profils où nous pouvons voir l'aspect lisse par plage de valeur de l'objet. L'aspect inhomogène des inserts composés de copeaux est bien conservé dans le cas des reconstructions avec régularisation. On peut voir sur les profils tracés de la figure V.5 l'effet des *ring* artéfacts (entourés en pointillés rouges), qui provoque des sauts de valeur supérieur au seuil de Tukey.

L'insert entouré en pointillés rouge dans les images V.4 et V.5 est l'insert de PVC (qui est aussi le matériau de base 1). Nous pouvons voir des variations de valeurs importantes au sein de cet insert selon la méthode de reconstruction utilisée. Cet aspect est plus visible sur les cartes (densité matériau 1/densité matériau 2) présentées dans la figure V.6. Les cartes $(f_1; f_2)$ de la figure V.6 sont tracées pour 6 ROIs qui sont l'intérieur des petits inserts de 20 mm dans les trois cylindres (tous les petites inserts sauf ceux avec des copeaux).

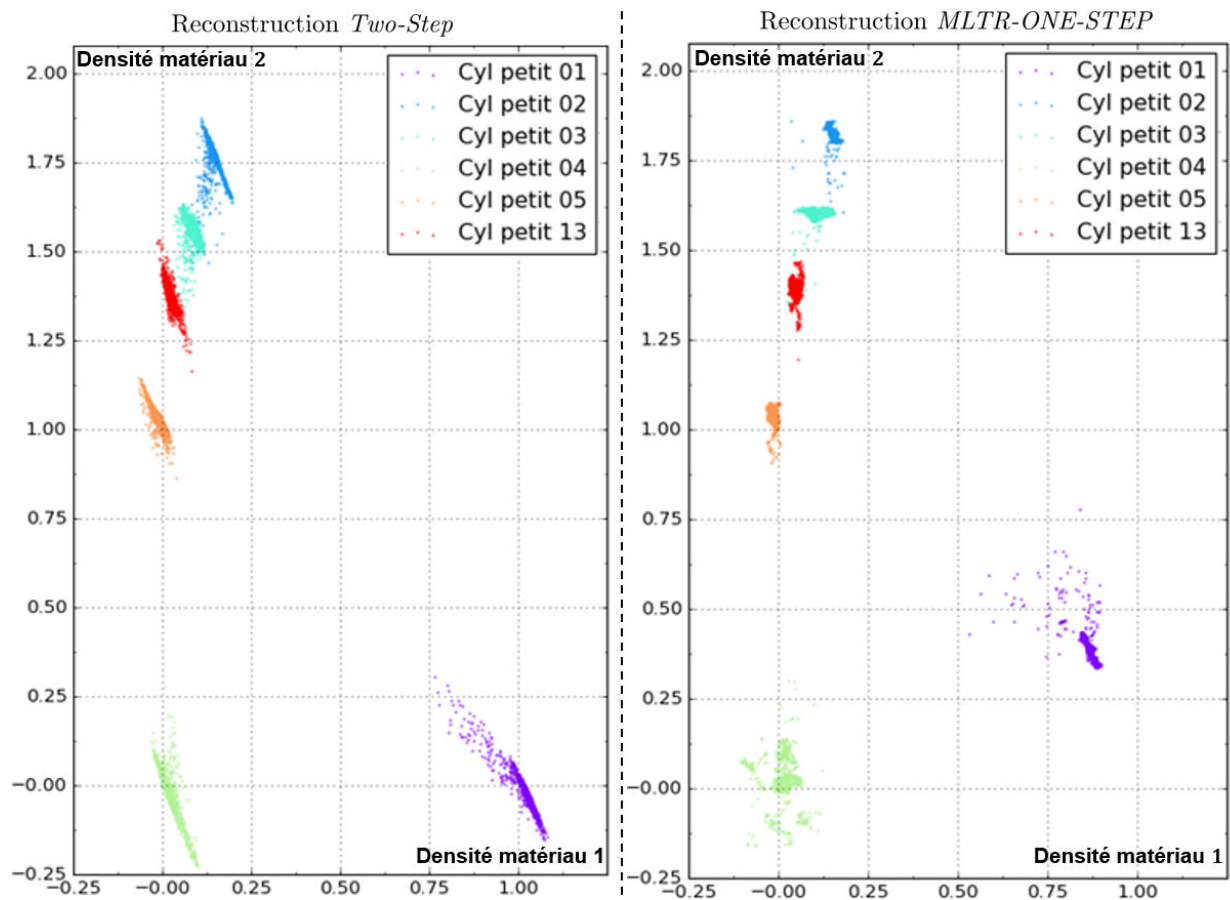


FIGURE V.6 – Les cartes $(f_1; f_2)$ selon la méthode de reconstruction appliquée. Matériaux des nuages : violet : PVC; vert : insert vide; orange : PE; rouge : POM; turquoise : PVDF et bleu : PTFE. "Cyl Petit 01-05" désignent les inserts dans le gros cylindre et "Cyl petit 13" l'insert homogène du cylindre moyen.

Les nuages sur la figure V.6 ont tendance à être plus condensés dans les cas où le MLTR-ONE-STEP a été utilisé. Cela est dû à l'effet de la régularisation. On remarque que les valeurs moyennes dans les ROIs varient de façon significative entre chaque méthode. Nous savons que la méthode *Two-Step* utilisée montre des bons résultats dans les conditions de bruit de cette acquisition. Ainsi les valeurs moyennes des densités matériau 1 et 2 des inserts estimées avec cette méthode sont proches de la réalité (pour une reconstruction dans l'espace PP/PVC).

Nous étudions ces valeurs plus précisément dans la table V.1 et les comparons avec celles obtenues avec le MLTR-ONE-STEP.

	Volume de base 1				Volume de base 2			
Méthode	Two-Step		MLTR-ONE-STEP		Two-Step		MLTR-ONE-STEP	
Valeur	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
Insert PVC	1.01	0.04	0.86	0.03	-0.02	0.06	0.40	0.05
Insert vide	0.02	0.02	0.01	0.02	-0.02	0.06	0.02	0.06
Insert orange	-0.01	0.02	-0.01	0.01	1.03	0.03	1.04	0.02
Insert rouge	0.02	0.01	0.05	0.01	1.38	0.04	1.39	0.03
Insert turquoise	0.08	0.02	0.10	0.02	1.55	0.04	1.60	0.02
Insert bleu	0.14	0.02	0.15	0.01	1.75	0.05	1.82	0.02

TABLE V.1 – Comparaison des valeurs moyennes et écart-type dans 6 ROIs entre la méthode *Two-Step* et la méthode MLTR-ONE-STEP.

Les couleurs des quatre derniers inserts en plastique font référence à celles utilisées dans la figure V.6 et sont respectivement : le PE, le POM, le PVDF et le PTFE.

La table V.1 montre une adéquation entre les valeurs obtenues par le MLTR-ONE-STEP et la méthode *Two-Step* utilisée. Sur l'insert de PVC, la méthode MLTR-ONE-STEP est loin de la décomposition attendue (comme le PVC est l'un des matériaux de base, sa décomposition est connue : $\mu_{PVC} = 1 \times \phi_1(E) + 0 \times \phi_2(E)$). Ce biais peut provenir soit d'une mauvaise connaissance du spectre efficace soit d'une mauvaise connaissance des coefficients d'atténuation du PP et du PVC : les coefficients calculés avec la base de données Storm&Israël [129] ne correspondent pas parfaitement aux matériaux de la base de calibration. Dans ce deuxième cas, l'espace de reconstruction est modifié (la nature des matériaux de base est différente). Les cartes de la figure V.6 ne sont donc pas exactement comparables.

La table V.1 montre que le bruit est plus faible avec le MLTR-ONE-STEP grâce à la régularisation implémentée. Celle-ci est prise ici avec des paramètres forts : le seuil de Tukey $\delta_T = 0.05$ est faible et le poids $\beta = 0.3$ élevé pour le nombre d'angles de vue pris en compte dans une mise à jour (3 angles de vue).

Nous comparons maintenant les images virtuelles à 60 keV obtenues avec les deux méthodes. Elles sont affichées dans la figure V.7. (Les images virtuelles obtenues à 160 keV sont affichées dans l'annexe F)

Le profil tracé dans la figure V.7 passe par les inserts de PVC et l'insert vide. On peut voir que malgré le biais estimé dans la ROI de l'insert de PVC dans les volumes matériau de base, le coefficient d'atténuation recombinaé à 60 keV est très proche dans les deux reconstructions. En effet, le coefficient moyen sur la ROI du PVC est estimé à 0.44 cm^{-1} dans les deux cas de reconstruction.

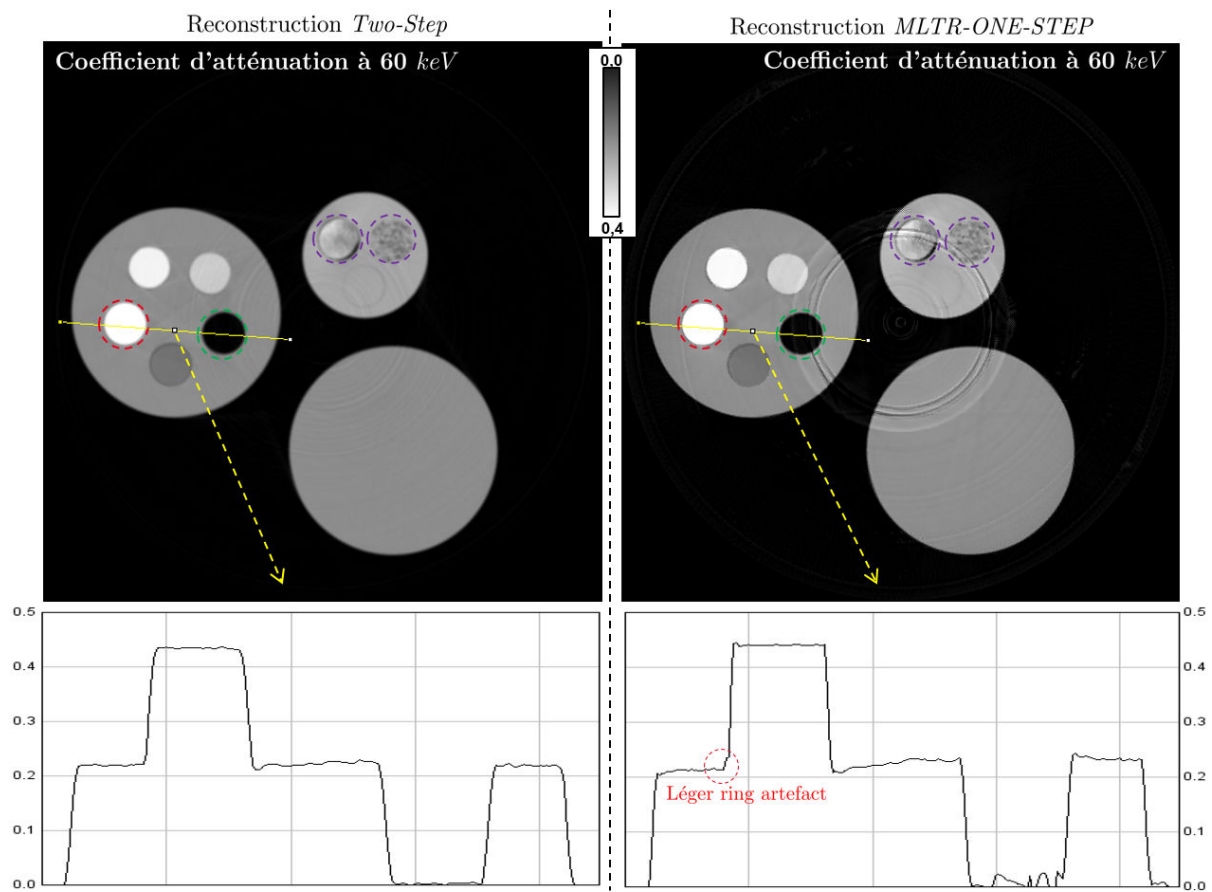


FIGURE V.7 – Images virtuelles 60 keV selon la méthode de reconstruction appliquée (unité cm^{-1}). Le profil est tracé à travers l'insert de PVC (pointillés rouges) et l'insert vide (pointillés verts).

La reconstruction MLTR-ONE-STEP est plus sensible à la présence de ring artefact comme le montre le profil dans l'insert vide. De plus, la zone de rétro-projection de la barrette centrale du détecteur est encore bien marquée. Par contre, l'image obtenue avec le MLTR-ONE-STEP présente des bordures entre matériaux plus franches ainsi qu'un aspect moins flou.

V.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un cas de reconstruction tomographique statistique *One-Step* (la méthode MLTR-ONE-STEP) appliquée à partir de données expérimentales regroupées en 12 canaux. Cette reconstruction décrit le modèle spectral de la mesure. Un protocole d'estimation au préalable du spectre efficace a été nécessaire.

La reconstruction MLTR-ONE-STEP effectuée présente des résultats en adéquation avec la méthode *Two-Step* utilisée, sauf dans le cas de l'insert de PVC de l'objet qui présente un biais dans les volumes matériau de base reconstruits. Le biais résiduel de la méthode peut provenir d'une mauvaise estimation du spectre efficace ou des coefficients d'atténuation des matériaux de la base de calibration. De plus, les volumes de base obtenus sont moins bruités que dans le cas de la reconstruction *Two-Step* grâce à la régularisation et présentent des bords plus francs. Les images virtuelles obtenues dans les deux cas sont très proches. Celle obtenue avec le MLTR-ONE-STEP présente également des bords plus francs et est plus sensible à la présence de ring artefacts.

Pour améliorer la reconstruction MLTR-ONE-STEP, il est possible d'affiner la connaissance des données en entrée ou d'implémenter un terme de régularisation supplémentaire. Nous abordons ces perspectives dans le prochain chapitre de conclusion.

Conclusions et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à la reconstruction tomographique spectrale. En particulier, nous avons développé une méthode de reconstruction tomographique à partir de données issues de détecteurs à comptage résolu en énergie. La résolution de ce problème contient à la fois une inversion géométrique (reconstruction d'un volume connaissant sa projection en plusieurs points) et une inversion de la réponse détecteur (estimation du spectre en photons atténués à partir du spectre mesuré). Pour résoudre ce problème, nous avons choisi une inversion du modèle direct total : méthode *One-Step*. Nous effectuons cette inversion avec l'algorithme MLTR-ONE-STEP que nous avons développé à partir de l'algorithme ML-TR introduit par De Man [3].

Nous avons dans un premier temps validé notre méthode MLTR-ONE-STEP sur des données issues de simulation. Les résultats ont montré que l'inversion *One-Step* était bien réalisée. Dans notre cas, nous avons initialisé les volumes reconstruits avec une méthode *Two-Step* simple et rapide pour accélérer et garantir la convergence. Nous avons étudiée l'influence des paramètres de la régularisation de Tukey que nous avons implémentée. Le choix de ces paramètres est important pour la reconstruction et en pratique il n'est pas facile de fixer ces paramètres.

Dans le cas de données simulées et d'une reconstruction à deux matériaux de base (absence de matériau à raies K), nous avons montré que deux canaux de mesure suffisent pour inverser le problème *One-Step*. Dans le cas de regroupement des mesures dans un nombre plus élevé de canaux, le nombre de photons dans chaque canal est plus faible et donc le bruit plus élevé. Nous avons montré que dans le cas d'une reconstruction *One-Step*, la régularisation permet d'obtenir un niveau de bruit équivalent quel que soit le nombre de canaux (entre 2 et 25). L'utilisation de plus de canaux de mesure permet une vitesse de convergence plus rapide en nombre d'itérations.

Certains diagnostics médicaux utilisent des produits de contraste comme par exemple l'iode. Ce matériau a une raie K dans la gamme d'énergie des examens médicaux. Ainsi l'injection de ce produit nécessite une reconstruction à trois fonctions de base dont une fonction avec la même discontinuité que le coefficient d'atténuation de l'iode. Dans le cas de reconstructions bi-énergie, seuls deux matériaux peuvent être reconstruits. Ainsi les matériaux choisis sont souvent l'iode et l'eau. Mais cela peut poser problème, par exemple pour la décomposition de l'os dont le coefficient d'atténuation est proche de l'iode (à la densité près) mais qui ne possède pas de raie K. C'est pourquoi il est préférable d'ajouter une troisième fonction de base. Dans ce cas, au moins trois canaux de mesure sont nécessaires mathématiquement et l'utilisation des détecteurs à comptage résolu en énergie permet cela en une seule acquisition. De plus, une décomposition eau/os/iode est compliquée à cause de la proximité des coefficients de l'os et de l'iode. L'augmentation du nombre de canaux de mesure pourrait se montrer avantageuse dans ce cas pour obtenir une meilleure décomposition en matériaux de base.

Dans le cas de données expérimentales, on peut être confronté à la présence de rayonnement diffusé et au phénomène d'empilement. Nous les avons négligés dans notre cas expérimental car nous avons utilisé un détecteur avec une seule ligne de pixels et une collimation précise d'une part et un faible flux de photons d'autre part. La présence de rayonnement diffusé reste une des premières sources d'erreur dans le cas de la tomographie avec des détecteurs à plusieurs lignes de pixels (comme les scanners médicaux). Les empilements sont un des facteurs limitants de l'utilisation à fort flux des détecteurs à comptage.

Comme exposé dans le chapitre état de l'art, l'application de méthodes de reconstruction tomographique décrivant le modèle physique spectrale à des données issues de détecteurs à comptage réelles est encore peu répandue. En effet, en pratique ce type de reconstruction nécessite une connaissance de certaines données comme le spectre incident ou la réponse du détecteur. Nous avons appliqué notre méthode sur un cas expérimental à 12 canaux. Ce nombre de canaux est élevé par rapport aux autres méthodes de reconstruction de la littérature où le nombre de canaux est de l'ordre de 4, 5 ou 6 canaux.

Les résultats de cette reconstruction montrent que le MLTR-ONE-STEP peut bien être appliqué au cas expérimental. Les résultats ont été comparés à une reconstruction *Two-Step* standard et non-itérative. Les résultats avec chacune des reconstructions sont équivalents dans les images virtuelles monochromatiques obtenues. Néanmoins, la reconstruction MLTR-ONE-STEP présente un léger biais dans la décomposition en base de matériau. Ce biais peut être dû à une connaissance imparfaite du spectre efficace pris en entrée de la méthode. Celui-ci a fait l'objet d'un protocole expérimental avant reconstruction. Une connaissance plus fine de ce spectre doit être apprise pour améliorer la décomposition en base de fonction. Les résultats obtenus avec le MLTR-ONE-STEP sont sujets à la présence de ring artéfacts mais présente des contours plus francs grâce à la régularisation de Tukey.

La méthode de reconstruction que nous avons développée relie directement les volumes reconstruits aux mesures brutes. Ainsi, elle montre un cadre flexible pouvant permettre diverses adaptations selon le domaine d'application. Nous présentons maintenant deux propositions d'amélioration de cette méthode.

Adaptativité des canaux :

Comme nous l'avons exposé dans le chapitre V, le détecteur MultiX©ME100 classe les photons dans 64 canaux par pixel. En pratique, un nombre faible de canaux (de 2 à 6) est suffisant pour l'inversion et un nombre élevé de canaux augmente le temps de reconstruction. Cependant ce détecteur peut permettre un regroupement dynamique des canaux. Pour un même nombre de canaux, plusieurs regroupements de canaux sont possibles avec ce détecteur. Il est alors possible de changer ce regroupement au cours des itérations de la reconstruction. Par exemple, dans le cas de la présence d'un matériau à raie K, il est possible d'ajuster le regroupement des canaux autour de l'énergie de cette raie K pour améliorer le résultat.

Ajout d'un autre terme d'a priori :

Nous avons évoqué dans la partie II.2.3 d'autres termes de régularisation que les termes usuels de lissage spatiale ou de parcimonie. En particulier dans le cas de reconstructions spectrales *One-Step*, il est possible de tirer parti de l'information *a priori* de l'objet étudié.

Quelques auteurs (Nakada et al. [110] 2015) ont déjà testé des *a priori* qui ne sont pas des termes de régularisation spatiale. Dans notre méthode la décomposition en base de matériaux constitue déjà un modèle d'a priori spectral assez fort. En effet, cette décomposition force la dépendance énergétique $\tau(E)$ du coefficient d'atténuation linéique $\mu(E)$ à être une combinaison linéaire de deux matériaux connus. Ainsi cette dépendance énergétique $\tau(E)$ est lisse et contrainte. En pratique, le nombre de matériaux présents dans un volume à reconstruire est fini. Cependant, dans certains cas les matériaux sont très difficilement différenciables comme les tissus mous dans l'abdomen humain. Dans une carte $(f_1; f_2)$, cela se manifeste par le regroupement des points en nuage autour de quelques points. On appelle cela la parcimonie des matériaux.

Pour l'instant, notre méthode prend en compte uniquement la proximité entre voisins spatiaux. Il est pertinent de prendre en compte la proximité dans la représentation $(f_1; f_2)$. Pour encourager la parcimonie des matériaux au cours de la reconstruction, il est possible de favoriser le regroupement de nuages ("clustering"). Ceci permettrait d'accélérer la décomposition en base de matériaux et de diminuer le bruit.

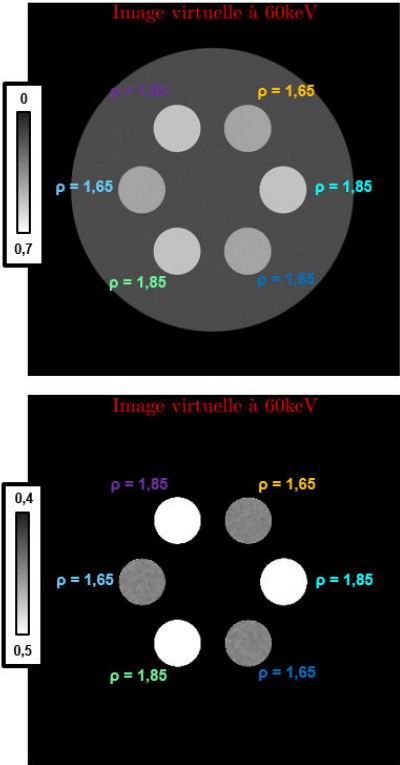
Pour illustrer notre propos, nous reconstruisons un objet de type cylindre en eau avec 6 inserts en os compact mais avec seulement 2 densités différentes. Ainsi plusieurs inserts ont des densités en os compact identiques. On observe dans la figure Ccl.1 le résultat. Dans la carte $(f_1; f_2)$, les inserts à même densité se superposent. Bien qu'éloignés spatialement dans l'objet, ils sont proches en densités de matériaux. On peut retrouver cette configuration dans le cas de contrôle non destructif où le même matériau est utilisé à plusieurs endroits de la pièce. Si on visualise une coupe issue d'un scanner médical, on peut observer de l'os dans plusieurs zones de l'image (cf partie I.7).

Pour favoriser le regroupement, il faut rajouter un terme de régularisation semblable à celui de Nakada et al. [110]. On peut introduire celui-ci par l'introduction d'une distribution de Gibbs et d'une fonction de potentiel ou par la définition d'une probabilité gaussienne (comme illustré sur la figure Ccl.1). Le terme est alors de la forme :

$$R_j(f_{1j}; f_{2j}) = \sum_{m=1}^{N_m} T(f_{1j} - f_1^m; f_{2j} - f_2^m) \Sigma_m^{-1}(f_{1j} - f_1^m; f_{2j} - f_2^m) \quad (V.1)$$

où m est l'indice de matériau considéré dans notre modèle de parcimonie, N_m le nombre de matériaux, $(f_1^m; f_2^m)$ la moyenne du modèle gaussien (décomposition du matériau) et Σ_m la matrice de covariance de notre modèle gaussien.

La difficulté de ce modèle réside dans le choix des paramètres gaussiens (moyenne $(f_1^m; f_2^m)$ et variance Σ_m). Le modèle le plus simple consiste à considérer connus ces paramètres. Selon le domaine d'application, cela est plus ou moins pertinent. La difficulté dans le cas du scanner médical est la variabilité biologique. En effet, un même organe (ie. matériau) a une densité et dépendance énergétique $\tau(E)$ légèrement différente d'un patient à l'autre. Donc on ne peut pas connaître précisément ces paramètres. De plus, les imposer peut entraîner une perte d'information car parfois l'objectif recherché est l'estimation de la densité. Une autre option est un regroupement dynamique qui varie en fonction du nombre d'itérations. Un avantage du regroupement dynamique est qu'il peut prendre en compte le fait qu'à l'état initial, la différenciation de matériaux proches n'est pas possible, alors qu'elle le devient après quelques itérations de MLTR-ONE-STEP.



A DROITE : Image virtuelle à 60 keV : il s'agit du même résultat au bout de 500 itérations mais avec deux contrastes différents pour illustrer la différence entre inserts.

Bibliographie

- [1] C. A. Bouman and K. Sauer. A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization. *IEEE Trans. on Med. Imaging* Vol. 5, No. 3, 1996.
- [2] K. Lange and R. Carson. EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *Journal of Computer Assisted Tomography* 8 :306-316, 1984.
- [3] B. De Man. *Iterative Reconstruction for Reduction of Metal Artifacts in Computed Tomography*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2001.
- [4] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein. *Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers*. Foundations and Trends in Machine Learning, Vol. 3, No. 1 (2010) 1–122, 2011.
- [5] A. Sossin, V. Rebuffel, J. Tabary, J. M. Létang, N. Freud, and L. Verger. Experimental validation of a multi-energy X-ray adapted scatter separation method. *Phys. Med. Biol.* 61 : pp. 8625–8639, 2016.
- [6] Swedish Medical Center. Low-dose CT scan for lung cancer screening. <https://www.swedish.org/services/thoracic-surgery/our-services/lung-cancer-screening-program/low-dose-ct-scan-for-lung-cancer-screening>, 2018.
- [7] A. Habib. *Détecteurs radiologiques grande surface, multi-énergie*. PhD thesis, Université de Grenoble (Ecole Doctorale EEATS) et Laboratoire détecteurs (CEA/LETI), Grenoble, Rhône-Alpes, France, 2014.
- [8] L. Chen. *Méthodes itératives de reconstruction tomographique pour la réduction des artefacts métalliques et de la dose en imagerie dentaires*. PhD thesis, STITS, Université Paris-Sud, HAL Archives Ouvertes, 2014.
- [9] K. M. Andersson, P. Nowik, J. Persliden, P. Thunberg, and E. Norrman. Metal artefact reduction in CT imaging of hip prostheses—an evaluation of commercial techniques provided by four vendors. *Br J Radiol*; 88., 2015.
- [10] R. E. Alvarez and A. Macovski. Energy-selective reconstructions in X-ray computerised tomography. *Phys. Med. Biol.* 21, pp. 733, 1976.
- [11] R. Forghani, B. De Man, and R. Gupta. Dual-energy computed tomography : Physical principles, approaches to scanning, usage, and implementation : Part 1. *Neuroimag. Clin. N. Am.* 27, 371-384, 2017.
- [12] B. J. Heismann, S. Wirth, S. Janssen, and Q. Spreiter. Technology and image results of a spectral CT system. *SPIE Medical Imaging Proceedings Volume 5368, Issue 1*, pp 52-59, 2004.
- [13] Delphi Precision Imaging. Casting - digital radiography. <https://www.delhiprecisionimaging.com/xray-welding-casts>, 2017.
- [14] J. Dumont-Fillon. Contrôle non destructif (CND). base documentaire : TIB585DUO.
- [15] Actutem TEST et MESURE. Principaux atouts et évolutions de la tomographie à rayons x. <http://www.actutem.com/principaux-atouts-et-evolutions-de-la-tomographie-a-rayons-x/>, Mars 2017.
- [16] E. Fredenberg. Spectral and dual-energy X-ray imaging for medical applications. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* 878; 74-87, 2018.

- [17] T. Su, V. Kaftandjian, P. Duvauchelle, and Y. Zhu. A spectral X-ray CT simulation study for quantitative determination of iron. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*894; 39–46, 2018.
- [18] A. Pourmorteza, R. Symons, D. S. Reich, M. Bagheri, T.E. Cork, S. Kappler, S. Ulzheimer, and D. A. Bluemke. Photon-counting CT of the brain : In vivo human results and image-quality assessment. *AJNR Am J Neuroradiol* 38 :2257–63, 2017.
- [19] V. S. K. Yokhana, B. D. Arhatari, T. E. Gureyev, and B. Abbey. Soft-tissue differentiation and bone densitometry via energy-discriminating X-ray microCT. *Optics Express*, Vol. 25, No. 23, 2017.
- [20] A. Mouton et T.P. Breckon. A review of automated image understanding within 3D baggage computed tomography security screening. *Journal of X-ray Science and Technology* 23, pp. 531–555, 2015.
- [21] X. Xu, Y. Xing, S. Wang, and L. Zhang. Systematic implementation of spectral CT with a photon counting detector for liquid security inspection. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*893; 99-108, 2018.
- [22] F. Natterer. *The mathematics of computerized Tomography*. John Wiley, 1986.
- [23] L. A. Feldkamp, L. C. Davis, and J. W. Kress. Pratical cone-beam algorithm. *J. Opt. Soc. Am.* Vol. 1, No. 6, 1984.
- [24] M. Beister, D. Kolditz, and W. A. Kalender. Iterative reconstruction methods in X-ray CT. *Physica Medica* 28, 94-108, 2012.
- [25] A. C. Kak and M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE PRESS, The Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., New York, 1988.
- [26] A. H. Andersen and A. C. Kak. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART) : A superior implementation of the art algorithm. *Ultrasonic Imaging*, 6 :81-94, 1984.
- [27] G. Wang and M. Jiang. Ordered-subset simultaneous algebraic reconstruction techniques (OS-SART). *Journal of X-ray Science and Technology*, 2004.
- [28] M. Jiang and G. Wang. Convergence of the simultaneous algebraic reconstruction technique (SART). *IEEE Trans. on Med. Imaging* Vol. 12, pp.957-961, 2003.
- [29] H. M. Hudson and R. S . Larkin. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE Trans. Med. Imaging* Vol. 13, No. 4, 1994.
- [30] D. H. Erdogan and J. A. Fessler. Ordered subsets algorithms for transmission tomography. *Phys. Med. Biol.* 44, 2835–2851, 1999.
- [31] J. A. Fessler. Iterative methods for image reconstruction, 2008.
- [32] R. M. Lewitt. Alternative to voxels image representation in iterative reconstruction algorithms. *Phys. Med. biol.* Vol. 37, 705-716, 1992.
- [33] K. M. Hanson and G. W. Wecksung. Local basis-function approach to computed tomography. *Appl. Optics*, 24(23) :4028–39, 1985.
- [34] P. Grangeat (Dir.). *La tomographie*. Hermès, Traité IC2, 2002.
- [35] I. A. Elbakri and J. A. Fessler. Efficient and accurate likelihood for iterative image reconstruction in X-ray computed tomography. *Proceedings SPIE 5032, Medical Imaging* : p.1839-50., 2003.
- [36] D. L. Snyder, C. W. Helstrom, A. D. Lanterman, M. Faisal, and R. L.White. Compensation for read-out noise in HST image restoration. *The Restoration of HST Images and Spectra II*, 1994.
- [37] J.-B. Thibault, K. D. Sauer, C. A. Bouman, and J. Hsieh. A three-dimensional statistical approach to improved image quality for multislice helical CT. *Med. Phys.* 34, 2007.
- [38] S. Ramani et J. A. Fessler. A splitting-based iterative algorithm for accelerated statistical X-ray CT reconstruction. *IEEE Trans. Med. Imaging* 31(3), pp. 677–688, 2012.

- [39] C. Cai, T. Rodet, S. Legoupil, and A. Mohammad-Djafari. A full-spectral bayesian reconstruction approach based on the material decomposition model applied in dual-energy computed tomography. *Med. Phys.* 40 : 111916, 2013.
- [40] P. Weiss. *Algorithmes rapides d'optimisation convexe. Applications à la reconstruction d'images et à la détection de changements*. PhD thesis, INRIA Sophia Antipolis, 2008.
- [41] A. Allaga, R. Draia, A. Benammara, and T. Boutkedjirt. X-rays tomographic reconstruction images using proximal methods based on l1 norm and tv regularization. *Procedia Computer Science* 127, pp. 236–245, 2018.
- [42] X. Zheng, I. Y. Chuny, Z. Li, Y. Long, and J. A. Fessler. Sparse-view X-ray CT reconstruction using l1 prior with learned transform. *IEEE Trans. Radiation and Plasma Med. Sci.*, ?. 2017. Submitted, 2017.
- [43] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed tomography. *IEEE Trans. Med. Imaging Vol.* 33, No. 8, 1997.
- [44] A. N. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Sov. Math. Dokl., Vol* 4, p 1624–1627, 1963.
- [45] P. J. Huber. *Robust statistics*. Wiley, New York, 1981.
- [46] I. A. Elbakri and J. A. Fessler. Statistical image reconstruction for polyenergetic X-ray computed tomography. *IEEE Trans. Med. Imaging Vol.* 21, No. 2, 2002.
- [47] Y. Long and J. A. Fessler. Multi-material decomposition using statistical image reconstruction for spectral CT. *IEEE Trans. Med. Imaging Vol.* 33, No. 8, 2014.
- [48] A. Blake and A. Zisserman. *Visual Reconstruction*. Cambridge, MA :MIT press, 1987.
- [49] D. Hoaglin, F. Mosteller, and J. Tukey. *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [50] Y. Pavia. *Détecteurs spectrométriques pour la mammographie et traitements associés*. PhD thesis, EEA INSA-Lyon, 2017.
- [51] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D* 60 ; 259-2687, 1992.
- [52] Y. Gousseau and J.M. Morel. Are natural images of bounded variation? *SIAM Journal Mathematical Analysis Vol.* 33(3), pp. 634–648, 2001.
- [53] E. Y Sidky, J. H. Jørgensen, and X. Pan. Convex optimization problem prototyping for image reconstruction in computed tomography with the chambolle–pock algorithm. *Phys. Med. Biol.* 57 3065–3091, 2012.
- [54] W. Xu and K. Mueller. A performance-driven study of regularization methods for gpu-accelerated iterative CT. *Proc 2nd High Performance Image Reconstruction Workshop*, 2009.
- [55] R. J. Murphy, D. L. Snyder, D. G. Politte, and J. A. O'Sullivan. Sieve-regularized image reconstruction algorithm with pose search in transmission tomography. *SPIE Medical Imaging Proceedings Volume* 5032, 2003.
- [56] S.H. Manglos, G.M. Gagne, A. Krol, F.D. Thomas, and R. Narayanaswamy. Transmission maximum-likelihood reconstruction with ordered subsets for cone beam CT. *Phys. Med. Biol.* 40 : pp. 1225-41, 1995.
- [57] N. Gac, A. Vabre, A. Mohammad-Djafari, A. Rabanal, and F. Buyens. GPU implementation of a 3D bayesian CT algorithm and its application on real foam reconstruction. *The First International Conference on Image Formation in X-ray Computed Tomography, HAL Archives Ouvertes*, 2010.
- [58] P. M. Joseph. An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images. *IEEE Trans. Med. Imaging Vol.* MI-1, No. 3, 1983.
- [59] B. De Man and S. Basu. Distance-driven projection and backprojection in three dimensions. *Phys. Med. Biol., Vol.* 49, pp. 2463–2475, 2004.

- [60] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical optimization*. Springer, second edition, 2006.
- [61] J. A. Fessler, E. P. Ficaro, N. H. Clinthorne, and K. Lange. Grouped-coordinate ascent algorithms for penalized-likelihood transmission image reconstruction. *IEEE Trans. Med. Imaging* Vol. 16, No. 2, 1997.
- [62] H. Nien. *Model-Based X-ray CT Image and Light Field Reconstruction Using Variable Splitting Methods*. PhD thesis, University of Michigan, 2014.
- [63] M. G. McGaffin. *X-ray CT Image Reconstruction on Highly-Parallel Architectures*. PhD thesis, University of Michigan, 2015.
- [64] T. Goldstein and S. Osher. The split bregman method for l1 regularized problems. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2, 323–343., 2009.
- [65] A. Chambolle and T. Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *HAL Archives ouvertes*, 2010.
- [66] B. Vandeghinste, B. Goossens, J. De Beenhouwer, A. Pizurica, W. Philips, S. Vandenberghe, and S. Staelens. Split-bregman-based sparse-view CT reconstruction. *Proc. Intl. Mtg. on Fully 3D Image Recon. in Rad. and Nuc. Med*; p. 431-4., 2011.
- [67] K. Taguchi, M. Zhang, E. C. Frey, J. Xu, W. P. Segars, and B. M. W. Tsui. Image-domain material decomposition using photon-counting CT. *SPIE Medical Imaging Proceedings Volume 6510*, 2007.
- [68] C. Maaß, M. Baer, and M. Kachelrieß. Image-based dual energy CT using optimized precorrection functions : A practical new approach of material decomposition in image domain. *Med. Phys.* Vol. 36 (8), 2009.
- [69] H. Q. Le and S. Molloy. Segmentation and quantification of materials with energy discriminating computed tomography : A phantom study. *Med. Phys.* 38, 2011.
- [70] A. M. Alessio and L. R. MacDonald. Quantitative material characterization from multi-energy photon counting CT. *Med. Phys.* Vol. 40 (3), 2013.
- [71] T. E. Curtis and R. K. Roeder. Effects of calibration methods on quantitative material decomposition in photon-counting spectral computed tomography using a maximum a posteriori estimator. *Med. Phys.* 44 (10), 2017.
- [72] C.J. Bateman et al. (31 auteurs!). MARS-MD : rejection based image domain material decomposition. *Journal of Instrumentation* Vol. 13, pp. 0502012, 2018.
- [73] G. Zhang, J. Cheng, L. Zhang, Z. Chen, and Y. Xing. A practical reconstruction method for dual energy computed tomography. *Journal of X-ray Science and Technology*, Vol. 16, No. 2, pp. 67-88, 2008.
- [74] P. Stenner, T. Berkus, and M. Kachelrieß. Empirical dual energy calibration "EDEC" for cone-beam computed tomography. *Med. Phys.* 34, 2007.
- [75] A. D. Laidevant, S. Malkov, and C. I. Flowers. Compositional breast imaging using a dual-energy mammography protocol. *Medical Physics*, Vol. 37, No. 1, 164, 2010.
- [76] H. N. Cardinal and A. Fenster. An accurate method for direct dual-energy calibration and decomposition. *Medical Physics*, Vol. 17, 327, 1990.
- [77] A. Potop, V. Rebuffel, J. Rinkel, A. Brambilla, F. Peyrin, and L. Verger. Investigation of the polynomial approach for material decomposition in spectral X-ray tomography using an energy-resolved detector. *SPIE Medical Imaging Proceedings Volume 9033*, 2014.
- [78] D. Wu, L. Zhang, X. Zhu, X. Xu, and S. Wang. A weighted polynomial based material decomposition method for spectral X-ray CT imaging. *Phys. Med. Biol.* 61 : pp. 3749-3783, 2016.
- [79] R. E. Alvarez. Estimator for photon counting detector energy selective X-ray imaging with multibin pulse height analysis. *Med. Phys.* 38 2324-34, 2011.

- [80] R.E. Alvarez. Efficient, non-iterative estimator for imaging contrast agents with spectral X-ray detectors. *IEEE Trans Med Imaging* Vol. 35, No. 4, 2016.
- [81] K. C. Zimmerman and T. G. Schmidt. Experimental comparison of empirical material decomposition methods for spectral CT. *Phys. Med. Biol.* 60 : pp. 3175-3191, 2015.
- [82] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Alan V. Oppenheim, Series Editor, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 1993.
- [83] E. Roessl and R. Proksa. K-edge imaging in X-ray computed tomography using multi-bin photon counting detectors. *Phys. Med. Biol.* 52 : pp. 4679–4696, 2007.
- [84] S. Wang, H. Gao, L. Zhang, D. Wu, and X. Xu. Quasi-monochromatic imaging in X-ray CT via spectral deconvolution using photon-counting detectors. *Phys. Med. Biol.* 62 : pp. 2208–2223, 2017.
- [85] R. Li, L. Li, and Z. Chen. Spectrum reconstruction method based on the detector response model calibrated by X-ray fluorescence. *Phys. Med. Biol.* 62 : pp. 1032–1045, 2017.
- [86] D. Wu, X. XU, L. Zhang, and S. Wang. A hybrid monte carlo model for the energy response functions of X-ray photon counting detectors. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A830* ; 397–406, 2016.
- [87] T. G. Schmidt. An empirical method for correcting the detector spectral response in energy-resolved CT. *SPIE Medical Imaging Proceedings Volume 8313*, 2012.
- [88] O. Lee, S. Kappler, C. Polster, and K. Taguchi. Estimation of basis line-integrals in a spectral distortion-modeled photon counting detector using low-order polynomial approximation of X-ray transmittance. *IEEE Trans Med Imaging*, Vol. 32, No. 2, 2017.
- [89] N. Ducros, J. Abascal, B. Sixou, S. Rit, and F. Peyrin. Regularization of nonlinear decomposition of spectral X-ray projection images. 2017.
- [90] T. Hohweiller, N.Ducros, F.Peyrin, and B. Sixou. Spectral CT material decomposition in the presence of poisson noise : Akullback–leibler approach. *RITS*, 2017.
- [91] J. P. Schlomka, E. Roessl, R. Dorscheid, S. Dill, G. Martens, T. Istel, C. Bäumer, C. Herrmann, R. Steadman, G. Zeitler, A Livne, and R. Proksa. Experimental feasibility of multi-energy photon-counting K-edge imaging in pre-clinical computed tomography. *Phys. Med. Biol.* 53 : pp. 4031–4047, 2008.
- [92] E. Y. Sidky, L. Yu, X. Pan, Y. Zou, and M. Vannier. A robust method of X-ray source spectrum estimation from transmission measurements : Demonstrated on computer simulated, scatter-free transmission data. *Journal of Applied Physics* 97, 124701, 2005.
- [93] J. Choi, K. Dong-Goo, K. Sunghoon, S. Younghun Sungan, and Y. Jong Chul. A unified statistical framework for material decomposition using multienergy photon counting X-ray detectors. *Med. Phys.* 40, 2013.
- [94] S. Ehn, T. Sellerer, K. Mechlem, A. Fehringer, M. Eppele, J. Herzen, F. Pfeiffer, and P. B. Noël. Basis material decomposition in spectral CT using a semi-empirical, polychromatic adaption of the beer–lambert model. *Phys. Med. Biol.* 62 : N1–N17, 2017.
- [95] A. Brambilla, A. Gorecki, A. Potop, C. Paulus, and L. Verger. Basis material decomposition method for a new spectrometric X-ray imager. *Journal of Instrumentation*, 12 (8), Art. No.. P08014, 2017.
- [96] M. Touch, D. P. Clark, W. Barber, and C. T. Badea. A neural network-based method for spectral distortion correction in photon counting X-ray CT. *Phys. Med. Biol.* 61 : pp. 6132-53, 2016.
- [97] S. Wang, Y. Xing, L. Zhang, and X. Xu. Enhanced material separation with a quasi-monochromatic CT imaging method using a photon counting detector. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A881* ; 9–15, 2018.
- [98] R. F., E. Y. Sidky, T. Gilat-Schmidt, and X. Pan. An algorithm for constrained one-step inversion of spectral CT data. *Phys. Med. Biol.* Vol. 61, 3784-3818, 2016.

- [99] T. G. Schmidt, R. F. Barber, and E. Y. Sidky. Spectral CT metal artifact reduction with an optimization-based reconstruction algorithm. *SPIE Medical Imaging Proceedings Volume 10132*, 2017.
- [100] K. Mechlem, S. Ehn, T. Sellerer, F. Pfeiffer, and P. B. Noël. Statistical iterative reconstruction for spectral CT using ratios of polynomial functions. *The 14th International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 2017.
- [101] S. Tairi, S. Anthoine, C., and Y. Boursier. Simultaneous reconstruction and separation in a spectral CT framework with a proximal variable metric algorithm. In *Proc. 5th Intl. Mtg. on image formation in X-ray CT*, pages 32–35, 2018.
- [102] C. Mory, B. Sixou, S. Si-Mohamed, L. Boussel, and S. Rit. Comparison of five one-step reconstruction algorithms for spectral CT. *HAL Archives ouvertes - <hal-01760845>*, 2018.
- [103] E. Y. Sidky, R. F. Barber, T. Gilat-Schmidt, and X. Pan. Three material decomposition for spectral computed tomography enabled by block-diagonal step-preconditioning. In *Proc. 5th Intl. Mtg. on image formation in X-ray CT*, pages 268–271, 2018.
- [104] T. G. Schmidt, R. F. Barber, and E. Y. Sidky. A spectral CT method to directly estimate basis material maps from experimental photon-counting data. *IEEE Trans Med Imaging Vol. 36*, No. 9, 2017.
- [105] K. Mechlem, S. Ehn, T. Sellerer, T. Braig, D. Münzel, F. Pfeiffer, and P. B. Noël. Joint statistical iterative material image reconstruction for spectral computed tomography using a semi-empirical forward model. *IEEE Trans Med Imaging EN COURS DE PUBLICATION*, 2017.
- [106] B. Chen, Z. Zhang, D. Xia, E. Y. Sidky, and X. Pan. Algorithm-enabled partial-angular-scan configurations for dual-energy CT. *Med. Phys.* 45 (5), 2017.
- [107] J. Liu and H. Gao. Material reconstruction for spectral computed tomography with detector response function. *Inverse Problems* 32, 114001, 2016.
- [108] T. Weidinger, T. M. Buzug, T. Flohr, S. Kappler, and K. Stierstorfer. Polychromatic iterative statistical material image reconstruction for photon-counting computed tomography. *International Journal of Biomedical Imaging*, 2016.
- [109] S. Bonettini, I. Loris, F. Porta, M. Prato, and S. Rebegoldi. On the convergence of a linesearch based proximal-gradient method for nonconvex optimization. *Inverse Problems* 33, 055005, 2017.
- [110] K. Nakada, K. Taguchi, G. S. K. Fung, and K. Amaya. Joint estimation of tissue types and linear attenuation coefficients for photon counting CT. *Medical Physics*, Vol. 38, No. 9, 5329, 2015.
- [111] A. Roche and F. Forbes for the Alzheimer’s Disease Neuroimaging Initiative. Partial volume estimation in brain mri revisited. *Med. Image Comput. Assist. Interv.* 17 :771-8., 2014.
- [112] B. Gonzales and D. Lalush. Full-spectrum CT reconstruction using a weighted vleast squares algorithm with an energy-axis penalty. *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol. 30, No. 2, 2011.
- [113] D. S. Rigie and P. J. La Rivière. Joint reconstruction of multi-channel, spectral CT data via constrained total nuclear variation minimization. *Phys. Med. Biol.* 60 1741, 2015.
- [114] D. Kazantsev, J. S. Jørgensen, M. S. Andersen, W. R. B. Lionheart, P. D. Lee, and P. J. Withers. Joint image reconstruction method with correlative multi-channel prior for X-ray spectral computed tomography. *Inverse Problems* 34, 064001, 2018.
- [115] A. Sawatzky, Q. Xu, C. O. Schirra, and M. A. Anastasio. Proximal ADMM for multi-channel image reconstruction in spectral X-ray CT. *IEEE Trans Med Imaging Vol. 33*, No. 8, 2014.
- [116] K. M. Brown, S. Zabic, and G. Shechter. Impact of spectral separation in dual-energy CT with anti-correlated statistical reconstruction. *Proceedings of the 13th International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 2015.
- [117] Y. Liu and Z. Yu. A joint iterative reconstruction algorithm for dual energy CT using ADMM. *Proceedings of the 13th International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 2015.

- [118] Y. Liu and Z. Yu. Whitening transform based noise reduction for spectral CT. In *Proc. 4th Intl. Mtg. on image formation in X-ray CT*, pages 533–6, 2016.
- [119] M. Persson and F. Grönberg. Bias–variance tradeoff in anticorrelated noise reduction for spectral CT. *Medical Physics*, Vol. 44, No. 9, e242, 2017.
- [120] C. O. Schirra, E. Roessl, T. Koehler, B. Brendel, A. Thran, D. Pan, M. A. Anastasio, and R. Proksa. Statistical reconstruction of material decomposed data in spectral CT. *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol. 32, No. 7, 2864-5., 2013.
- [121] W. Ha, E. Y. Sidky, and R. F. Barber. X-ray spectral calibration from transmission measurements using gaussian blur model. *SPIE Medical Imaging Proceedings Volume 10132*, 2017.
- [122] W. Ha, E. Y. Sidky, R. F. Barber, T. Gilat Schmidt, and X. Pan. Estimating the spectrum in computed tomography via kullback-leibler divergence constrained optimization. *En cours de publication Medical Physics*, 2018.
- [123] B. Perkhounkov, J. Stec, E. Y. Sidky, and X. Pan. X-ray spectrum estimation from transmission measurements by an exponential of a polynomial model. *SPIE Medical Imaging Proceedings Volume 9783*, 2016.
- [124] J. Dickmann, J. Maier, S. Sawall, T. Thüring, S. Gkoumas, C. Brönnimann, and M. Kachelriess. A count rate-dependent method for spectral distortion correction in photon counting CT. *SPIE Medical Imaging Proceedings Volume 10573*, 2018.
- [125] J. Nuyts, P. Dupont, and L. Mortelmans. Iterative reconstruction of transmission sinograms with low signal to noise ratio. In MA Birkhäuser, Boston, editor, *M. Kárny et al. (eds.), Computer Intensive Methods in Control and Signal Processing*, 1997.
- [126] C. Thibaudeau. *Tomodensitométrie par comptage de photons avec discrimination en énergie*. PhD thesis, Université de Sherbrooke, 2015.
- [127] V. Rebuffel, J. Tabary, P. Hugonnard, E. Popa, A. Brambilla, G. Montemont, and L. Verger. New functionalities of SINDBAD simulation software for spectral X-ray imaging using counting detectors with energy discrimination. *IEEE NSS/MIC*, 2012.
- [128] S. Choi and J. Baek. A new method to reduce cone beam artifacts by optimal combination of FDK and TV-IR images. *SPIE Medical Imaging Proceedings Volume 10574*, 2018.
- [129] E. Storm and H. I. Israël. Photon cross section from 1 kev to 100 mev for elements $z = 1$ to $z = 100$. *Nuclear data tables A7*, 565-681, 1970.

Annexe A

Exemple d'images radiographiques

Dans la figure A.1 est présenté la première image historique de radiographie à rayons X.



FIGURE A.1 – Première image radiographique réalisée par Wilhelm Conrad Röntgen en 1895.

La figure A.2 illustre le fait que le coefficient d'atténuation μ dépend du matériau traversé par les rayons X. Il est plus élevé dans le cas de matériaux plus durs comme les métaux. A l'aide du logiciel Sindbad (développé au CEA/LETI/LSIV [127]), il est possible de simuler l'image d'atténuation des photons pour un objet donné. L'objet étudié est un cylindre d'eau de 30 *cm* de diamètre avec un insert en aluminium de 5 *cm* de diamètre. Dans le cadre de la figure A.2, $N^{att} = \sum_{E=1}^{N_E} N^{att}(E)$. L'aluminium étant plus atténuant, le nombre de photons le traversant est plus faible après l'objet.

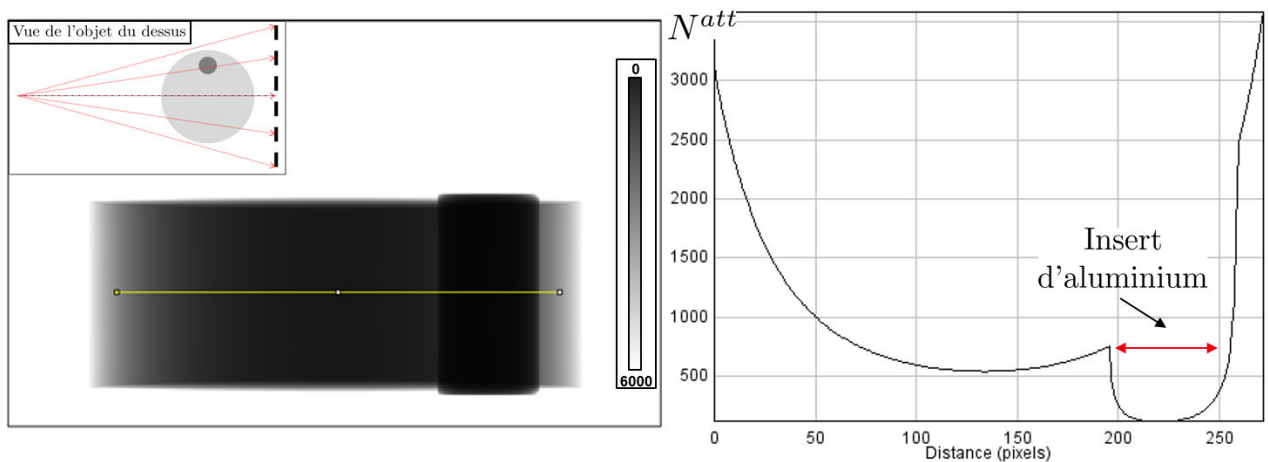


FIGURE A.2 – A gauche : Simulation d'une image en nombre de photons atténués.
A droite : Profil correspondant au segment tracé en jaune.

Annexe B

Algorithmes d'optimisation

B.1 Gradient simple et à pas optimal

Le schéma de base de ces algorithmes est pour le cas d'une minimisation :

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n - \rho(\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n} \quad (\text{B.1})$$

où ρ est appelé le pas de descente et $(\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n} = \frac{\partial\Phi(m;\mu^n)}{\partial\mu_j}$ (j^e coordonnée du gradient calculé en $\mu = \mu^n$). Dans le cas d'un pas fixe, ce schéma est appelé descente de gradient à pas fixe [60]. Une manière d'améliorer ce simple schéma est d'optimiser la valeur prise par ρ .

Par définition, sa valeur optimale est, à chaque itération :

$$\rho^n = \arg \min_{\rho} \left\{ \Phi(\mu_j^n - \rho(\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n}) \right\} \quad (\text{B.2})$$

Cette expression est calculable dans le cas d'une fonction de coût quadratique :

$$\rho^n = \frac{^T(\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n} (\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n}}{^T(\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n} H^n (\nabla\Phi)_j|_{\mu=\mu^n}} \quad (\text{B.3})$$

où H^n est la matrice Hessienne calculée en $\mu = \mu^n$ définie en chaque coefficient par :

$$H_{j\xi}^n|_{\mu=\mu^n} = \frac{\partial^2\Phi(m;\mu^n)}{\partial^2\mu_j\partial\mu_\xi} \quad (\text{B.4})$$

Néanmoins le calcul de la matrice Hessienne peut se révéler très coûteux en calcul. De plus, dans le cas de fonctionnelles plus complexes (non quadratiques), le calcul du pas optimal se révèle plus compliqué car non analytique.

B.2 Algorithme du gradient conjugué

Le principe de cet algorithme est de faire évoluer la solution selon des directions d dites conjuguées. Cela est plus pertinent que d'évoluer selon la direction du gradient. De plus, dans ce cas, l'algorithme est assuré de converger en autant d'itérations que la dimension de l'image cherchée. Pour la résolution du système : $p = A\mu$, l'algorithme s'écrit comme suit dans une forme optimisée ([60] p.112) :

```

 $r^{(0)} = A.\mu^{(0)} - p; d^{(0)} = -r^{(0)}; n = 0$ 
while(critère) :
 $\alpha^{(n)} = -\frac{T_{r^{(n)}}r^{(n)}}{T_{d^{(n)}}Ad^{(n)}}$ 
 $\mu^{(n+1)} = \mu^{(n)} + \alpha^{(n)}.d^{(n)}$ 
 $r^{(n+1)} = r^{(n)} + \alpha^{(n)}A.d^{(n)}$ 
 $\beta^{(n+1)} = \frac{T_{r^{(n+1)}}r^{(n)}}{T_{r^{(n)}}r^{(n)}}$ 
 $d^{(n+1)} = -r^{(n+1)} + \beta^{(n+1)}d^{(n)}$ 
 $n = n + 1$ 
end(while);

```

Dans le cas où la fonctionnelle n'est plus quadratique, l'algorithme évolue légèrement en changeant le mode de calcul des directions de descente : l'algorithme du Gradient Conjugué (GC) pré-conditionné, l'algorithme de Fletcher-Reeves GC ou l'algorithme de Polak-Ribière GC (cf [60]).

B.3 Algorithme d'optimisation alternée - "Variable Splitting"

La stratégie de ces algorithmes est de diviser le problème en plusieurs sous-problèmes plus simples à résoudre ("diviser pour mieux régner") et s'applique généralement au problème aux moindres carrés pondérés avec norme TV :

$$\mu^* = \arg \min_{\mu} \left\{ \frac{1}{2} \|p - A\mu\|_{\Sigma}^2 + \beta.TV(\mu) \right\} \quad (B.5)$$

avec $p = -\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$ la mesure en atténuation et β le poids de la régularisation. Principalement trois algorithmes ont ensuite été appliqués au problème de reconstruction tomographique : la méthode Split Bregman (Goldstein et Osher, 2009 [64]) ; l'ADMM qui dérive de celle-ci (*Alternating Direction Method of Multipliers*, Boyd et al. , 2011 [4]) et l'algorithme de Chambolle&Pock (Chambolle et Pock, 2010 [65]). Nous détaillons la formulation de ces problèmes dans le tableau B.1.

Méthode Split Bregman (et ADMM) :

Le problème d'optimisation sous contraintes équivalent du problème II.35 s'écrit :

$$(\mu^*; \nu^*) = \arg \min_{\mu, \nu} \left\{ \frac{1}{2} \|p - A\mu\|_{\Sigma}^2 + \Phi(\nu) \right\} \text{ tel que } \nu = C\mu \quad (\text{B.6})$$

avec Φ la norme L^1 et C l'opérateur différentiel sous forme de matrice.

Le problème du Lagrangien augmenté correspondant est la minimisation de :

$$\mathcal{L}(\mu; \nu; e) = \frac{1}{2} \|p - A\mu\|_{\Sigma}^2 + \Phi(\nu) + \frac{\eta}{2} \|C\mu - \nu - e\|_2^2 \quad (\text{B.7})$$

Le principe de l'algorithme "Split Bregman" est de minimiser de manière alternée sur μ , ν et e en fixant les autres ; η est un paramètre.

Il est possible de rajouter encore une autre variable dans le problème sous contraintes :

$$(\mu^*; u^*; \nu^*) = \arg \min_{\mu, u, \nu} \left\{ \frac{1}{2} \|p - u\|_{\Sigma}^2 + \Phi(\nu) \right\} \text{ tel que } u = A\mu \text{ et } \nu = C\mu \quad (\text{B.8})$$

Et le problème du Lagrangien devient :

$$\mathcal{L}(\mu; u; \nu; d; e; \rho; \eta) = \frac{1}{2} \|p - u\|_{\Sigma}^2 + \Phi(\nu) + \frac{\rho}{2} \|A\mu - u - d\|_2^2 + \frac{\eta}{2} \|C\mu - \nu - e\|_2^2 \quad (\text{B.9})$$

La minimisation sur ces 6 variables est appelée ADMM (*Alternating Direction Method of Multipliers*) et se révèle plus efficace en reconstruction tomographique.

Algorithme de Chambolle&Pock :

Une autre classe de méthode de minimisation alternée est la résolution du problème primal-dual. Le problème primal s'écrit dans le cas général :

$$\mu^* = \arg \min_{\mu} \{F(K\mu) + G(\mu)\} \quad (\text{B.10})$$

On lui associe le problème dual :

$$\epsilon^* = \arg \max_{\epsilon} \{-F^*(\epsilon) - G^*(-^T K \epsilon)\} \quad (\text{B.11})$$

Où on appelle fonction conjuguée :

$$H^*(z) = \max_{z'} \{ \langle z; z' \rangle - H(z') \} \quad (\text{B.12})$$

où $\langle z; z' \rangle$ est le produit scalaire. Alors le problème B.10 est équivalent au problème :

$$\min_{\mu} \max_y \{ \langle K\mu; y \rangle - F^*(\epsilon) + G(\mu) \} \quad (\text{B.13})$$

La minimisation alternée de ce problème est effectuée avec l'algorithme de Chambolle&Pock. Dans le cas d'une reconstruction tomographique, on a [53] :

$$— (y; z) = F_1(y) + F_2(z) \text{ avec } F_1(y) = \frac{1}{2} \|p - y\|_{\Sigma}^2 \quad F_2(z) = \beta \|z\|_1$$

$$— G(x) = 0 \text{ et } x = \mu; y = A\mu; z = \nabla \mu \text{ et } K = \begin{pmatrix} A \\ \nabla \end{pmatrix}$$

TABLE B.1 – Tableau présentant les formulations des problèmes de Lagrangien augmenté (Split-Bregman et ADMM) et Primal Dual (algorithme de Chambolle&Pock dans le cas de la reconstruction tomographique).

Annexe C

Combinaison d'une loi poissonnienne et binomiale

Cette annexe vise à démontrer l'aspect poissonnien des mesures du problème de PCD-CT. Physiquement le modèle de bruit correspondant le mieux au phénomène de générations de rayons X est le bruit poissonnien. Ainsi, le nombre de photons atténués peut être modélisé par un bruit poissonnien. En interprétant la matrice réponse du détecteur comme une probabilité, on introduit une épreuve de Bernoulli au niveau du détecteur. Nous montrons ici que dans ce cas-là le nombre de photons mesurés en sortie d'un détecteur suit toujours une loi de Poisson de paramètre connu.

Nous montrons dans cet annexe que si : $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ et $Y|X \sim \mathcal{B}(X, p)$ alors $Y \sim \text{Poisson}(\lambda \times p)$. X représente le nombre de photons atténués réels ; Y le nombre de photons après détecteurs réels, λ le nombre de photons modélisés par notre modèle direct et p la probabilité de détection (coefficient $DRM(c; p)$).

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad (\text{C.1})$$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \quad (\text{C.2})$$

$$Y|X \sim \mathcal{B}(X, p) \quad (\text{C.3})$$

$$P(Y = y|X = x) = \begin{cases} \frac{x!}{(x-y)!y!} p^y (1-p)^{(x-y)} & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

$$P(Y = y, X = x) = P(Y = y|X = x)P(X = x) \quad (\text{C.5})$$

$$= \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \frac{x!}{(x-y)!y!} p^y (1-p)^{(x-y)} \quad (\text{C.6})$$

$$= \frac{(\lambda p)^y e^{(-\lambda)}}{y!} \frac{(\lambda - \lambda p)^{(x-y)}}{(x-y)!} \quad (\text{C.7})$$

$$P(Y = y) = P(Y = y, X \in \mathcal{N}) = \sum_{x \geq y} P(Y = y, X = x) + \sum_{x < y} \underbrace{P(Y = y, X = x)}_{=0, \forall x < y} \quad (\text{C.8})$$

$$= \sum_{x-y \geq 0} P(Y = y, X = x) \quad (\text{C.9})$$

$$= \frac{(\lambda p)^y e^{(-\lambda)}}{y!} \sum_{x-y=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda p)^{(x-y)}}{(x-y)!} \quad (\text{C.10})$$

$$= \frac{(\lambda p)^y e^{-\lambda p}}{y!} \quad (\text{C.11})$$

Soit :

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda p) \quad (\text{C.12})$$

Nous retrouvons bien une loi de Poisson dont nous pouvons calculer le paramètre.

Annexe D

Calcul du gradient et du hessien du MLTR-ONE-STEP

D.1 Calcul du gradient pour le MLTR-ONE-STEP

Nous détaillons ici le calcul du gradient du terme d'attache aux données (Vraisemblance Poissonnienne) du MLTR-ONE-STEP.

La log-vraisemblance s'écrit :

$$PL(m; f_1; f_2) = \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} \left[m_i^c \log \left(\sum_{E=1}^{N_E} B_i^{cE}(f_1; f_2) \right) - \sum_{E=1}^{N_E} B_i^{cE}(f_1; f_2) \right] \quad (D.1)$$

avec :

$$B_i^{cE}(f_1; f_2) = S(c; E) \cdot e^{-att_i(E; f_1; f_2)} \quad (D.2)$$

et :

$$att_i(E; f_1; f_2) = \phi_1(E)[Af_1]_i + \phi_2(E)[Af_2]_i \quad (D.3)$$

On a donc :

$$\bar{m}_i^c(f_1; f_2)(f_1, f_2) = \sum_{E=1}^{N_E} B_i^{cE}(f_1; f_2) \quad (D.4)$$

Et on a :

$$\frac{\partial B_i^{cE}(f_1; f_2)}{\partial f_{bj}} = -A_{ij} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) \quad (D.5)$$

Pour calculer le gradient (on inverse les deux termes pour prendre en compte le "-" de D.5) :

$$\frac{\partial PL(m; f_1, f_2)}{\partial f_{bj}} = \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} \left[\sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) - m_i^c \times \frac{\sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2)}{\sum_{E'=1}^{N_E} B_i^{cE'}(f_1; f_2)} \right] \quad (D.6)$$

On factorise la somme sur l'énergie :

$$(\nabla PL)_{bj} = \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{E=1}^{N_E} A_{ij} \phi_b(E) \left[B_i^{cE}(f_1; f_2) - m_i^c \times \frac{B_i^{cE}(f_1; f_2)}{\sum_{E'=1}^{N_E} B_i^{cE'}(f_1; f_2)} \right] \quad (D.7)$$

$$(\nabla PL)_{bj} = \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{E=1}^{N_E} A_{ij} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) \left[1 - \frac{m_i^c}{\bar{m}_i^c} \right] \quad (D.8)$$

D.2 Calcul du hessien pour le MLTR-ONE-STEP

On repart de l'expression du gradient D.8 et des notations de la partie précédente :

$$(\nabla PL)_{bj} = \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{E=1}^{N_E} A_{ij} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) \left[1 - \frac{m_i^c}{\bar{m}_i^c(f_1; f_2)} \right] \quad (D.9)$$

Alors le hessien s'obtient par :

$$H_{bj,ak} = \frac{\partial(\nabla PL)_{bj}}{\partial f_{ak}} \quad (D.10)$$

$$H_{bj,ak} = - \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} A_{ik} \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) \phi_a(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) \times \left[1 - \frac{m_i^c}{\bar{m}_i^c(f_1; f_2)} + m_i^c \times \frac{\sum_{E'=1}^{N_E} \frac{\phi_a(E')}{\phi_a(E)} B_i^{cE'}(f_1; f_2)}{\left(\bar{m}_i^c(f_1; f_2) \right)^2} \right]$$

$$H_{bj,ak} = - \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} A_{ik} \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) \phi_a(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) \times \left[1 + \frac{m_i^c}{\bar{m}_i^c(f_1; f_2)} \left(\frac{\sum_{E'=1}^{N_E} \frac{\phi_a(E')}{\phi_a(E)} B_i^{cE'}(f_1; f_2)}{\bar{m}_i^c(f_1; f_2)} - 1 \right) \right]$$

$$H_{bj,ak} = - \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} A_{ik} \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) \phi_a(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) \times \left[1 + \frac{m_i^c}{\bar{m}_i^c(f_1; f_2)} \left(\frac{\sum_{E'=1}^{N_E} B_i^{cE'}(f_1; f_2) \left[\frac{\phi_a(E')}{\phi_a(E)} - 1 \right]}{\sum_{E'=1}^{N_E} B_i^{cE'}(f_1; f_2)} \right) \right]$$

Pour simplification, on écrit le hessien comme somme de :

$$H_{bj,ak} = - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} A_{ik} h_{c,i}^{a,b} \quad (D.11)$$

$$\text{Avec } h_{c,i}^{a,b} = \sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) \phi_a(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) + \frac{m_i^c \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E') - \phi_a(E)]}{\left(\bar{m}_i^c(f_1; f_2) \right)^2}$$

On s'intéresse maintenant dans $h_{c,i}^{a,b}$ au terme :

$$\sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E') - \phi_a(E)] \quad (D.12)$$

On dédouble cette double somme et on inverse les indices E et E' dans la deuxième double somme, ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E') - \phi_a(E)] = \\ \frac{1}{2} \left[\sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E') - \phi_a(E)] \right. \\ \left. + \sum_{E'=1}^{N_E} \sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E') B_i^{cE'}(f_1; f_2) B_i^{cE}(f_1; f_2) [\phi_a(E) - \phi_a(E')] \right] \end{aligned}$$

On rassemble en une seule double somme et on factorise par $B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2)$:

$$\begin{aligned} \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E') - \phi_a(E)] = \\ \frac{1}{2} \left[\sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_b(E) [\phi_a(E') - \phi_a(E)] + \phi_b(E') [\phi_a(E) - \phi_a(E')]] \right] \end{aligned}$$

On peut factoriser le terme $[\phi_a(E) - \phi_a(E')]$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E') - \phi_a(E)] = \\ \frac{1}{2} \left[\sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E) - \phi_a(E')] [-\phi_b(E) + \phi_b(E')] \right] \end{aligned}$$

La double somme à droite peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E') - \phi_a(E)] = \\ \frac{-1}{2} \left[\sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E) - \phi_a(E')] [\phi_b(E) - \phi_b(E')] \right] \end{aligned}$$

Cette double somme est symétrique et ainsi elle peut s'écrire (les termes où $E = E'$ étant nuls) :

$$\begin{aligned} \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{N_E} \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E') - \phi_a(E)] = \\ \frac{-1}{2} \left[2 \times \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{E-1} B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E) - \phi_a(E')] [\phi_b(E) - \phi_b(E')] \right] \end{aligned}$$

Donc le terme $h_{c,i}^{a,b}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} h_{c,i}^{a,b} = \sum_{E=1}^{N_E} \phi_b(E) \phi_a(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) - \frac{m_i^c}{\left(\bar{m}_i^c(f_1; f_2)\right)^2} \times \\ \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{E'=1}^{E-1} B_i^{cE}(f_1; f_2) B_i^{cE'}(f_1; f_2) [\phi_a(E) - \phi_a(E')] [\phi_b(E) - \phi_b(E')] \end{aligned}$$

En conclusion, le hessien peut s'exprimer :

$$H_{bj,ak} = - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} A_{ik} h_{c,i}^{a,b} \quad (\text{D.13})$$

avec

$$h_{c,i}^{a,b} = \sum_{E=1}^{N_E} \phi_a(E) \phi_b(E) B_i^{cE}(f_1; f_2) \times \left[1 - \frac{m_i^c \sum_{E'=1}^{E-1} B_i^{cE'}(f_1; f_2) \left[\frac{\phi_a(E')}{\phi_a(E)} - 1 \right] \left[\frac{\phi_b(E')}{\phi_b(E)} - 1 \right]}{\left(\bar{m}_i^c(f_1; f_2) \right)^2} \right] \quad (\text{D.14})$$

Annexe E

Résultats Simulation - Cartes avec ROIs non rognées

Nous affichons donc ici les cartes où les voxels rognés sont affichés en gris. Les figures E.2 et E.1 correspondent à l'objet décrit dans la partie IV.1.1.

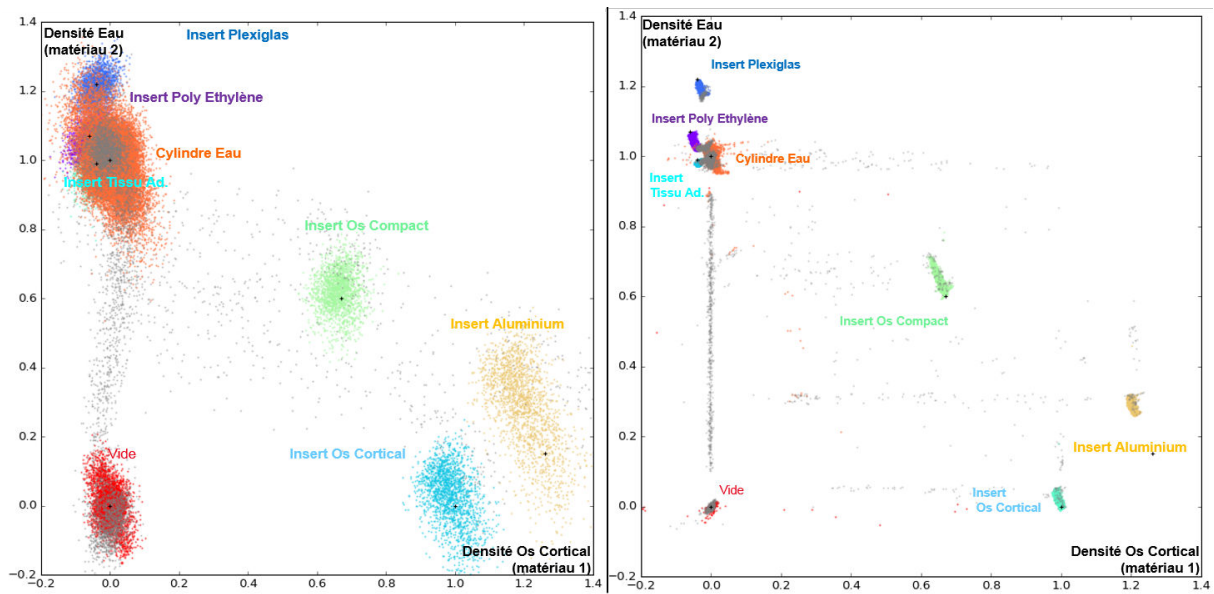


FIGURE E.1 – Comparaison des cartes $(f_1; f_2)$ pour le cas de reconstruction sur données bruitées sans/avec terme de régularisation et avec. Les '+' sont les valeurs vraies attendues pour chaque matériau.

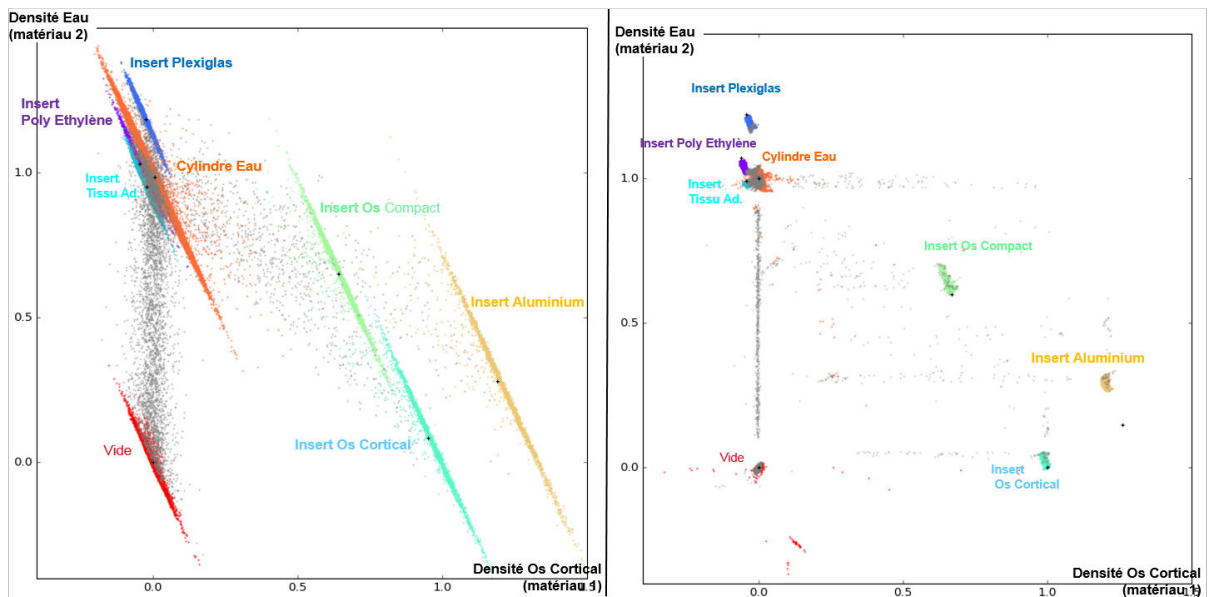


FIGURE E.2 – Comparaison entre MLTR-ONE-STEP régularisé ($\beta = 0.05$ et $\delta_T = 0.2$) et "two-step" polynomiale (16 zones). Comparaison des cartes $(f_1; f_2)$: Gauche "two-step"; droite : "one-step".

Les figures E.3 et E.4 correspondent à l'objet décrit dans la partie IV.3.1 dans le cas d'un cylindre en eau avec 6 inserts en os compact de 2 ou 6 densités volumiques différentes.

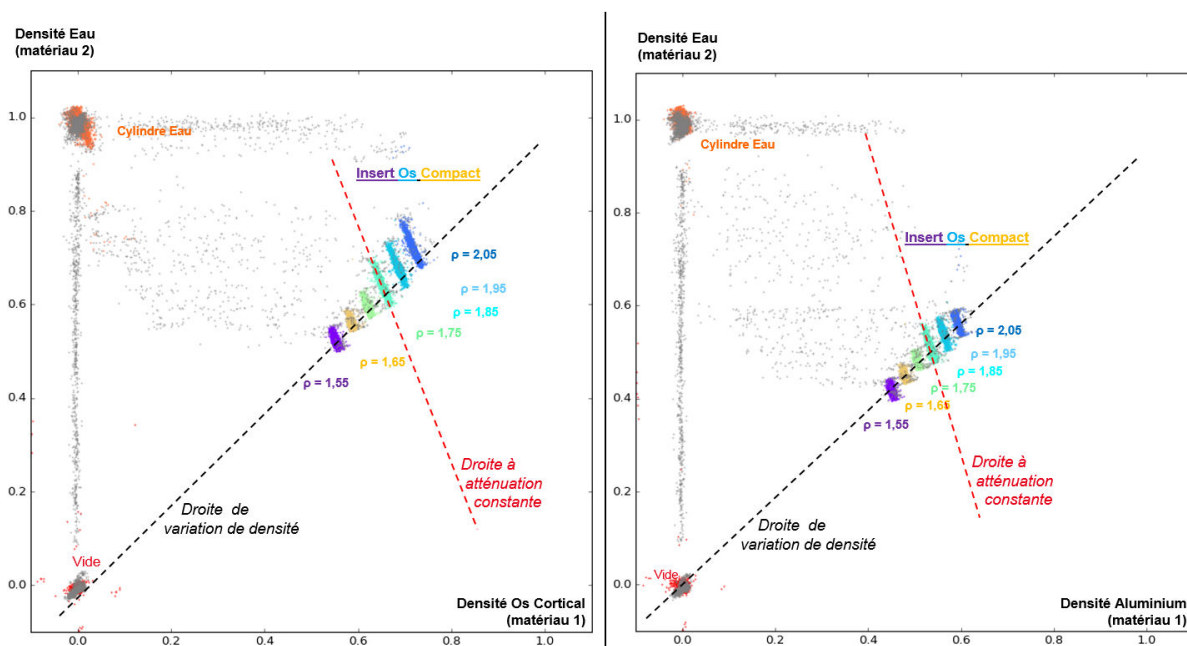


FIGURE E.3 – Comparaison des cartes (f_1 ; f_2) pour le cas de reconstruction en Eau/Os cortical et Eau/Aluminium. Les '+' affichés sur chaque carte sont les valeurs vraies attendues pour chaque insert.

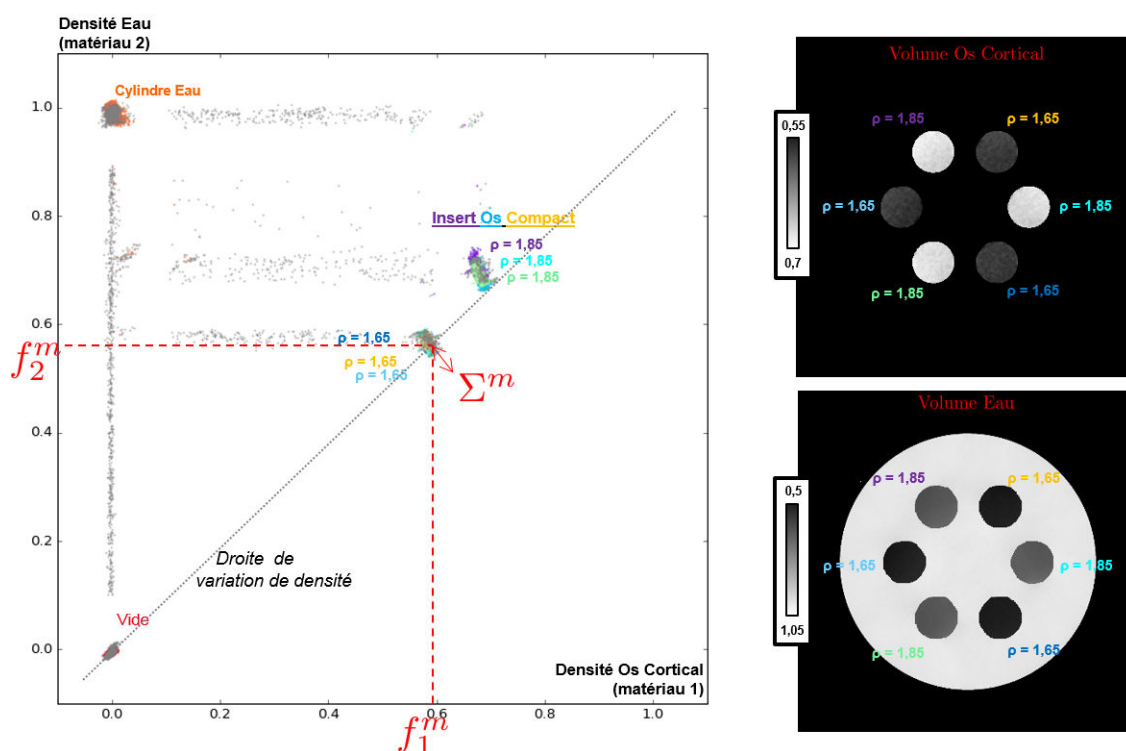


FIGURE E.4 – A GAUCHE : Cartes (f_1 ; f_2) pour le cas d'une reconstruction en Eau/Os cortical pour un cylindre avec 6 inserts en Os compact (Deux densités différentes). A DROITE : Image virtuelle à 60 keV résultat au bout de 500 itérations (Deux contrastes différents).

Les figures E.5 et E.6 correspondent à l'objet décrit dans la partie IV.1.1 dans le cas où le nombre de canaux varie.

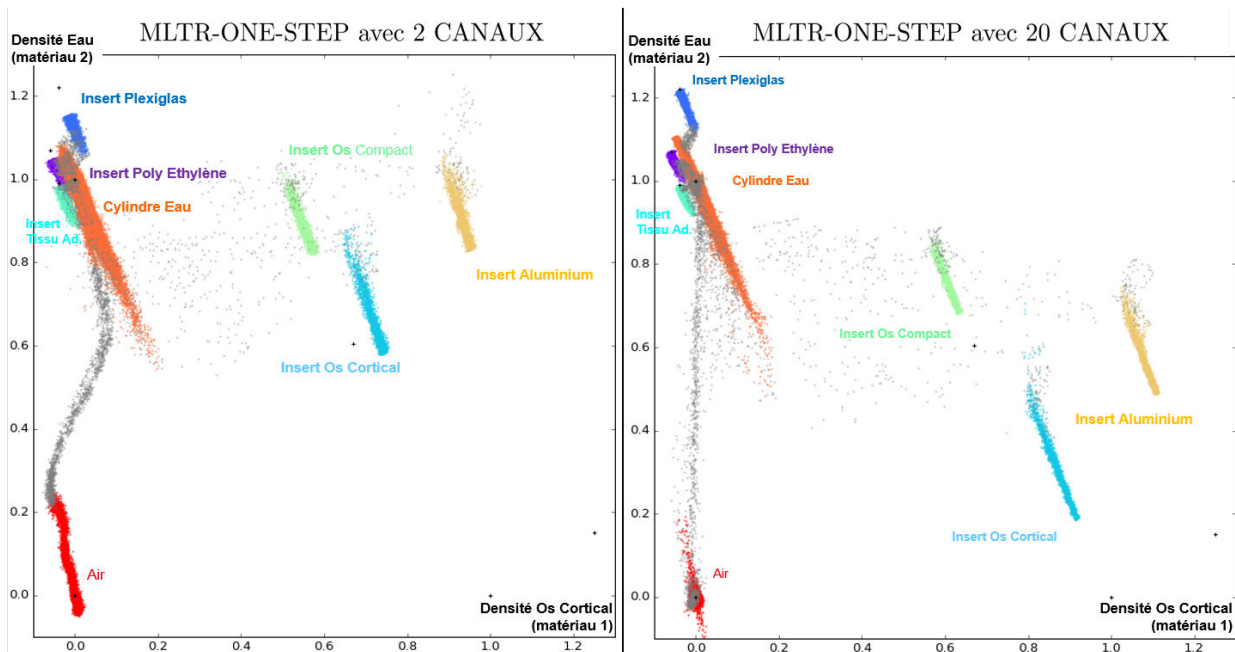


FIGURE E.5 – Comparaison MLTR-ONE-STEP 2 canaux VS 20 canaux avec état initial nul au bout de 100 itérations avec les voxels frontières affichés en gris. Les '+' affichés sur chaque carte sont les valeurs vraies attendues pour chaque insert.

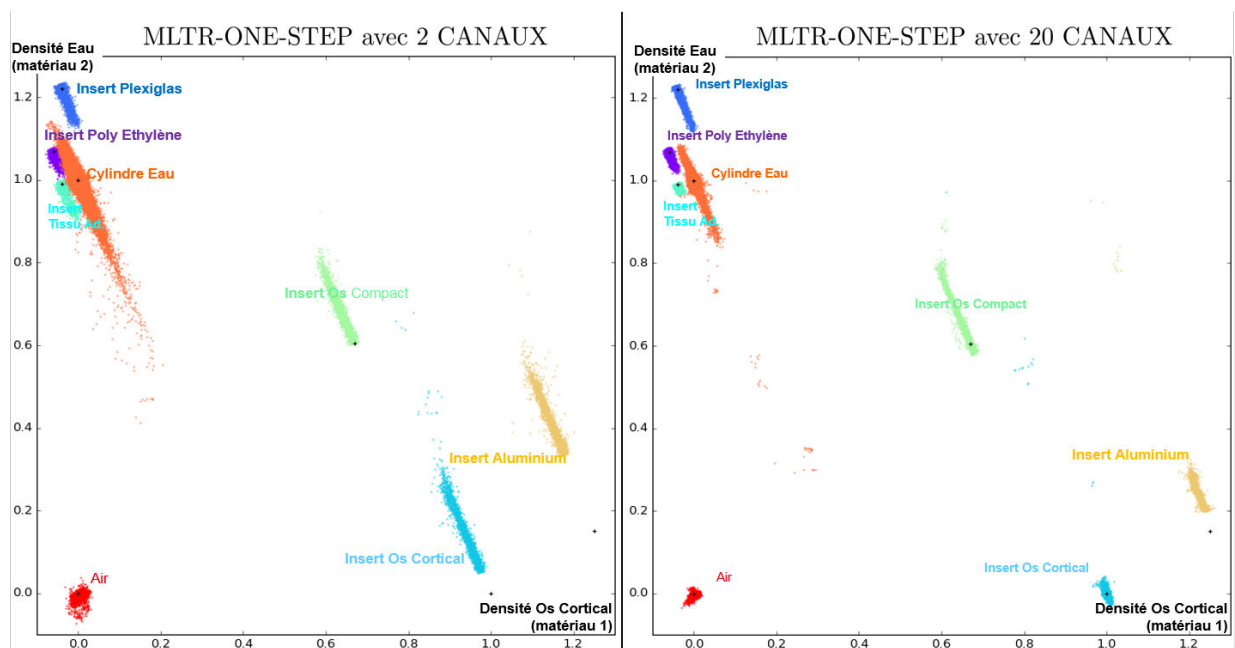


FIGURE E.6 – Comparaison MLTR-ONE-STEP 2 canaux VS 20 canaux avec état initial nul au bout de 500 itérations. Les '+' affichés sur chaque carte sont les valeurs vraies attendues pour chaque insert.

Annexe F

Sinogramme de la mesure expérimentale du chapitre 5

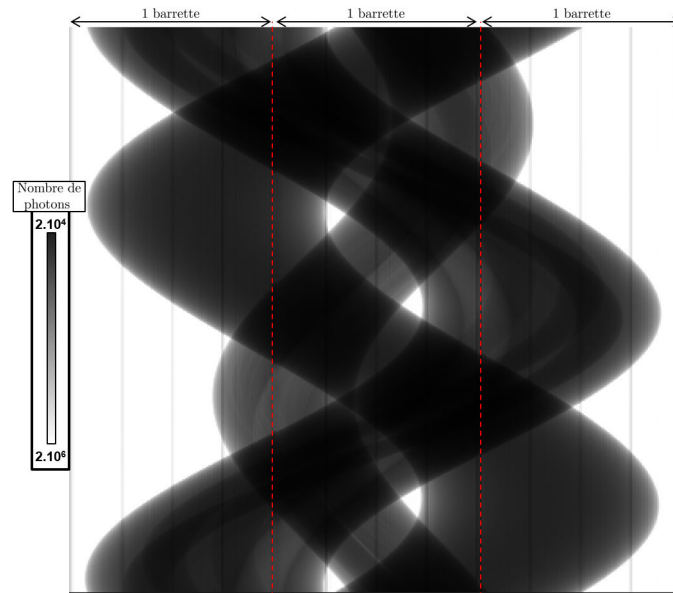


FIGURE F.1 – Sinogramme mesuré lors de l'étude sur données réelles expérimentales du chapitre 5. Le sinogramme représente le nombre de photons sommés sur tous les canaux.

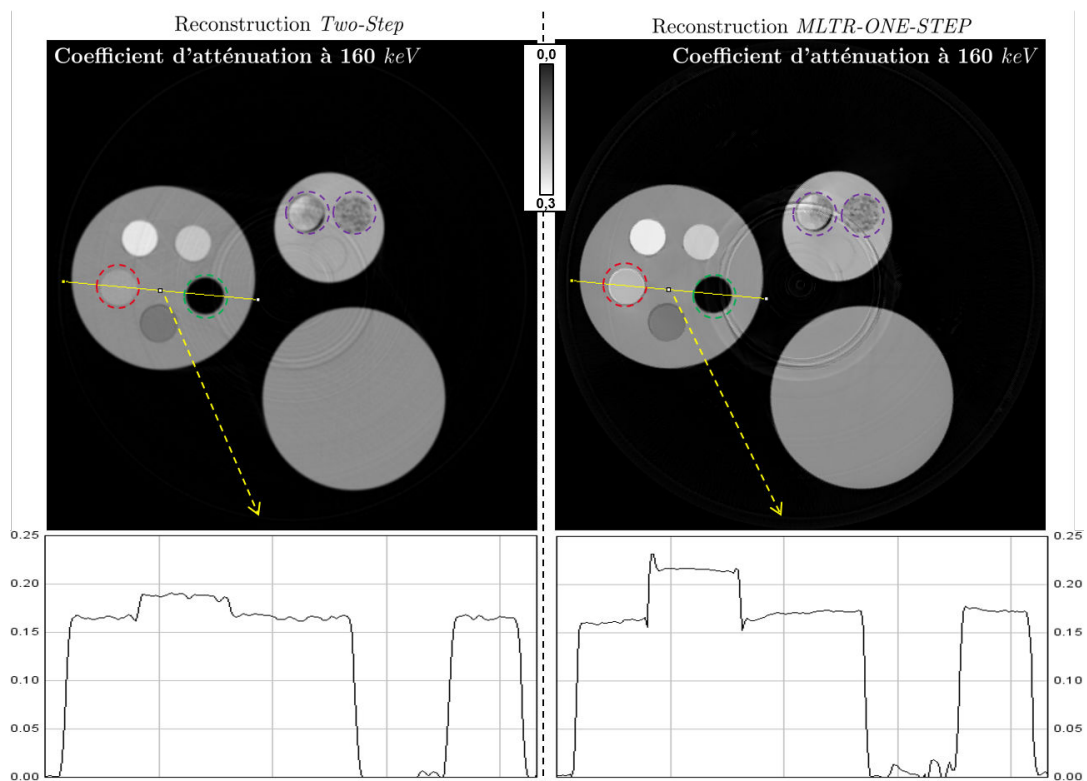


FIGURE F.2 – Images virtuelles à 160 keV selon la méthode de reconstruction appliquée (unité cm^{-1}).

